Objets Réels
En Mathématique et Physique

Confrontation épistémologique au niveau des cardinalités

Georges Gras

Professeur, retraité de l'Université
de Franche-Comté-Besançon
(Laboratoire de mathématiques)

Avant-propos

Nous tentons de mettre en évidence et de décrire un hiatus fondamental, entre mathématique classique et physique théorique, dont nous pensons (en tant que mathématicien) qu'il n'est pas anecdotique pour la description du «réel» en physique. En effet, depuis quelques années les physiciens eux-mêmes sont en perpétuelle interrogation concernant la confrontation des deux disciplines, dans la mesure où la technicité issue des découvertes en physique fondamentale oblige à une mathématisation systématique, sans laquelle plus rien ne semble exprimable, mais au détriment des aspects plus conceptuels et du questionnement sur la pertinence même du processus.

En outre, sans vouloir être indélicat, on peut se poser des questions sur la nature de la perception qu'ont réellement, des mathématiques, la plupart de ses utilisateurs,.

Cette quête du « réel » physico-mathématique débouche sur une quantité impressionnante d'arguments contradictoires défendus par les uns et les autres (l'espace est-il « discret » ou « continu », le temps est-il une « notion émergente» ou une «réalité objective», dilemme «localité vs non-localité», etc.). Voir par exemple les textes de Lee Smolin [Sm3], de Max Tegmark ([T1], [T2]), ou [Ro] parmi bien d'autres cités dans la bibliographie. De nombreux articles ont rendu compte régulièrement de ces points de vue (dont beaucoup dans « Pour la Science » ou « La Recherche »).

Notre but n'est pas de choisir entre ces propositions, mais de mettre en évidence les *problèmes concrets* qui sont à notre avis en amont des péripéties évoquées ci-dessus et qui semblent mal perçus. Ceci obligera à revenir sur la nature même des mathématiques, en tout cas celles manifestement utilisées par tous les scientifiques.

Que l'on se rassure, excepté dans les Chapitres annexes (VI à XII), il ne s'agira pas de technique mathématique pour la physique (pour cela, voir les très aboutis ouvrages de Roger Penrose), mais de réflexions logiques (voire bourbachiques), en général omises dans l'enseignement universitaire classique, car enseignants et étudiants préfèrent en découdre au plus vite avec de l'algèbre linéaire, des équations aux dérivées partielles de l'analyse, des probabilités, et autres aspects féconds de l'algèbre, de la géométrie et de la théorie des nombres, le tout dans un cadre «théorie des ensembles » qui est uniquement un vocabulaire dont le principal mérite est l'universalité au niveau des concepts, notations, etc. Et ceci est tout à fait légitime mais banalise ses dimensions « surréalistes » (axiome de l'infini, axiome du choix, etc.), sans lesquelles le simple ensemble $\mathbb{R}$ des « nombres réels » n'existerait pas !

Or cet effort d'approfondissement fait découvrir les « passages obligés » de toute utilisation des mathématiques comme outil, et qui se résument en les notions de nombres et de cardinalités au sens ensembliste ainsi qu'en les aspects existence et construction des objets mathématiques. On verra que cela ne consiste pas à enfoncer une porte ouverte, mais pose au contraire des questions autant techniques que philosophiques pouvant suggérer d'autres approches méthodologiques susceptibles de dépasser le consensus actuel sur l'utilisation des mathématiques.

Pour poser les bases de ce problème crucial des « cardinalités ensemblistes » (cf. § 5)), nous commençons par un chapitre préliminaire consacré à la citation intégrale, et commentée, d'un paragraphe du monumental *Récoltes et semailles – Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien* de Grothendieck [Gro]. [**?**]

Ensuite, nous allons citer et commenter une série d'extraits d'articles de physiciens contemporains, s'interrogeant essentiellement sur la « structure fondamentale » à considérer pour l'Univers, indépendemment de toute échelle ; ceci constitue le Chapitre I.

Le Chapitre II introduit et précise un peu le point de vue « objets réels » en mathématique et en physique. Le cas des mathématiques sera approfondi dans le Chapitre III. En ce qui concerne la physique, nous donnerons un certain nombre d'exemples classiques, bien connus des physiciens, de cette relation qui privilégie l'analyse réelle ou complexe, la géométrie différentielle, les algèbres d'opérateurs, les espaces de Hilbert, le tout dans le cadre classique issu des apprentissages universitaires, et qui culmine avec par exemple l'« équation de Schrödinger » en mécanique quantique ou les « variétés de Calabi-Yau » en « théorie des supercordes ». On voudra bien être indulgent pour notre incompétence en physique.

Le Chapitre III est consacré au seul cas des mathématiques à titre de repère et afin de mieux comprendre la responsabilité qu'il y a à formaliser la physique via les mathématiques classiques évoquées ci-dessus ; en mathématique, l'idée de réalité pose a priori un problème plus facile à cerner qu'en physique, et susceptible de servir de modèle de pensée si l'on croit à une plus grande universalité des processus mathématiques.

Le côté très « académique » de ce chapitre est volontaire et sert à montrer que, même en mathématique, les habitudes intellectuelles sont trompeuses ; ce chapitre peut servir de synthèse ensembliste, courte et ciblée, qu'il n'est pas toujours facile de trouver en raison de l'aversion actuelle pour la vision purement bourbachique des mathématiques, considérée comme étant sans grand intérêt (par exemple pour les applications). Or il faut bien admettre que les physiciens n'utilisent, jusqu'à présent, que cette mathématique dans le même cadre que les mathématiciens eux mêmes (mêmes fondements logiques, notations, et vocabulaire de la « théorie des ensembles » telle que pratiquée aujourd'hui).

Il sera même fait un exposé détaillé de la notion physiquement troublante de «suites de Cauchy de rationnels» ! non seulement pour la construction du corps $\mathbb{R}$ des si mal nommés « nombres réels », mais pour mettre en évidence un possible aspect expérimental, sur l'espace physique qu'il conviendrait d'analyser, celui-ci étant historiquementassimilé à un «fond» euclidien de type $\mathbb{R}^n$. Ceci présuppose l'existence de métriques (ou mieux de topologies) et de mesures sur l'espace physique, mais lesquelles ? Dans le Chapitre IX, des constructions associant des métriques archimédiennes [1] et ultramétriques sont proposées (par exemple le compactifié p-adique de $\mathbb{R}$ et ses généralisations, cf. § 6)), ainsi qu'une réflexion plus générale sur la notion si féconde de topologie.

De toutes façons, l'un des aspects les plus contestables de l'utilisation des mathématiques en physique est que implicitement tout est réputé « mesurable », autrement dit qu'à toute « entité physique » on peut associer un nombre (distance, durée, nombre de « composants », dont les combinaisons portent des noms familiers comme vitesse, fréquence, etc.) ; cette idée que tout est métrisable au sens topologique est déjà très arbitraire, car déjà, ceci n'a pas toujours lieu en mathématique.

Le Chapitre IV vise à établir, avec précision et exemples, cet illogisme fondamental qui existe dans l'utilisation systématique des mathématiques (essentiellement l'analyse réelle classique et ses conséquences) pour décrire la physique, utilisation qui tend de plus en plus vers une unification des deux disciplines, et ceci quelle que soit la théorie physique envisagée à différentes échelles (mécanique quantique, cosmologie), sans parler de l'alternative terrifiante :

« **discret vs continu** »

qui occasionne un trouble croissant dans la communauté scientifique (nous y viendrons au Chapitre I). Il se termine par une tentative de synthèse en direction de l'aspect « axiomatisation » qui semble être insuffisant en physique fondamentale.

---

(1) C'est l'axiome dit d'Archimède qui suppose qu'on a une structure additive munie d'une relation d'ordre totale (cas de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), et qui affirme que pour deux grandeurs inégales, il existe toujours un multiple entier de la plus petite, supérieur à la plus grande (ceci par opposition aux espaces p-adiques qui sont non archimédiens, cf. § 26).

Par exemple un point capital, qui revient comme un leitmotiv, est l'impact considérable de toute « mesure » (au sens physique) sur toute « expérience » (notamment en mécanique quantique avec la fonction d'onde de Schrödinger et la décohérence associée). Personnellement, je n'ai jamais compris ce qu'était une mesure en physique ; il y a clairement une absence de définition axiomatique qui devient préoccupante dans les aspects théoriques ultimes. Quels sont les montages qui constituent une mesure intrinsèque et quels sont ceux qui n'en constituent pas ? On doit pouvoir définir la négation d'une propriété comme en mathématique. Une mesure est-elle indépendante du contexte ?

Les «expériences de pensée» sont-elles alors légitimes, de même nature ?

Le Chapitre V propose une illustration détaillée de mathématiques discrètes (théorème de dualité diophantienne de Kronecker), pour montrer l'influence des « phénomènes diophantiens » (i.e., liés à la nature des nombres manipulés) sur des situations basiques, concrètes, pouvant se rencontrer en physique, montrant ainsi la précarité des considérations calculatoires, même élémentaires.

Autrement dit, si l'on accepte la pertinence de la notion de nombre réel en physique, il faut aussi en accepter les déraisonnables propriétés, qui ne sont pas banales contrairement à l'idée que l'on s'en est fait à l'usage. Nous considérons qu'une « preuve expérimentale » de la relative incompatibilité mathématique vs physique telles qu'associées classiquement ne devrait pas être considérée comme utopique.

Les chapitres suivants sont constitués d'annexes plus techniques sur des rappels de fondements, en Mathématique et en physique, utilisés dans les chapitres précédents. Cependant les illustrations mathématiques que nous proposons peuvent facilement être abordés par des non scientifiques, même si cela coûte un relatif effort à certains ; il y a trop souvent dans la littérature de ce type une démagogie de présentation (absence de démonstrations techniques) qui éloigne finalement du propos. Par exemple la preuve, que nous détaillons au Chapitre VI, du profond Théorème de Kronecker est un modèle d'esthétique mathématique très accessible, mais est surtout indispensable à la compréhension de notre démarche dans tout ce travail.

Ce livre, destiné principalement à des non spécialistes, est en relation avec des articles publiés dans «Pour La Science» (PLS), l' «Encyclopædia Universalis» (EU), «La Recherche» (LR), ainsi que de nombreux ouvrages de vulgarisation, qui montrent une prise de conscience de beaucoup de scientifiques sur ces questions et qui proposent des tentatives d'explications (de la mécanique quantique à la cosmologie), souvent purement spéculatives, mais toujours en termes de mathématiques usuelles. Dans cet ordre d'idées, on pourra par exemple consulter l'article suivant de Alain Boutot posant de vastes bases de philosophie des sciences :

http://www.universalis.fr/encyclopedie/sciences-science-et-philosophie,

ainsi que le très complet ouvrage [EZ] sur les débats philosophiques de la physique quantique.

Le présent livre peut modestement alimenter la réflexion de physiciens et de philosophes des sciences, au moins sur le cas particulier (pourtant décisif) des « cardinalités », point qui n'est pas souvent abordé en profondeur.

Toutes les citations concernant des textes publiés sont *en caractères penchés*, et pour éviter toute confusion, nos commentaires éventuels au sujet de ces écrits sont en **caractères romains** dans les intitulés « COMMENTAIRE » (et parfois développés à l'intérieur même de ces citations).

Le Bourg d'Oisans, Juillet 2017 – Mai 2018

Georges Gras
g.mn.gras@wanadoo.fr

Table des matières

Chapitre préliminaire

Le point de vue de Grothendieck

Voici le verbatim d'un passage extrait du long texte (*Récoltes et semailles – Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*) de Grothendieck [Gro] qui est dans le domaine public puisqu'il est accessible par quiconque sur internet. Certes l'objectif principal de ce travail n'est pas consacré à des réflexions sur la physique, mais à l'occasion de l'évocation d'Einstein et de la révolution des fondements de la physique au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, et par comparaison avec le cas des mathématiques « grothendieckiennes », il s'exprime aussi sur la problématique que nous avons en vue dans ce livre (avec son style et son franc-parlé), ce qui nous a semblé être un bon point de départ.

1) Début du § 2.20 du texte de Grothendieck

La situation me semble très proche de celle qui s'est présentée au début de ce siècle, avec l'apparition de la théorie de la relativité d'Einstein. Il y avait un cul-de-sac conceptuel, plus flagrant encore, se concrétisant par une contradiction soudaine, laquelle semblait irrésoluble. Comme de juste, l'idée nouvelle qui allait remettre de l'ordre dans le chaos était une idée d'une simplicité enfantine. La chose remarquable (et conforme à un scénario des plus répétitifs. . .), c'est que parmi tous ces gens brillants, éminents, prestigieux qui étaient sur les dents soudain, pour essayer de « sauver les meubles », personne n'y ait songé, à cette idée. Il fallait que ce soit un jeune homme inconnu, frais émoulu (si ça se trouve) des bancs des amphithéâtres estudiantins, qui vienne (un peu embarrassé peut-être de sa propre audace. . .) expliquer à ses illustres aînés ce qu'il fallait faire pour « sauver les phénomènes » : il y avait qu'à plus séparer l'espace du temps ![2] *Techniquement, tout était réuni alors pour que cette idée*

(2) C'est un peu court, bien sûr, comme description de l'idée d'Einstein. Au niveau technique, il fallait mettre en évidence quelle structure mettre sur le nouvel espace-temps (c'était

éclose et soit accueillie. Et c'est à l'honneur des aînés d'Einstein, qu'ils aient su en effet accueillir l'idée nouvelle, sans trop morigéner. C'est là un signe que c'était encore une grande époque. . .

Du point de vue mathématique, l'idée nouvelle d'Einstein était banale. Du point de vue de notre conception de l'espace physique par contre, c'était une mutation profonde, et un «dépaysement» soudain. La première mutation du genre, depuis le modèle mathématique de l'espace physique dégagé par Euclide il y avait 2400 ans, et repris tel quel pour les besoins de la mécanique par tous les physiciens et astronomes depuis l'antiquité (y inclus Newton), pour décrire les phénomènes mécaniques terrestres et stellaires.

Cette idée initiale d'Einstein s'est par la suite beaucoup approfondie, s'incarnant en un modèle mathématique plus subtil, plus riche et plus souple, en s'aidant du riche arsenal des notions mathématiques déjà existantes.[3] *Avec la « théorie de la relativité généralisée », cette idée s'élargit en une vaste vision du monde physique, embrassant dans un même regard le monde subatomique de l'infiniment petit, le système solaire, la voie lactée et les galaxies lointaines, et le cheminement des ondes électromagnétiques dans un espace-temps courbé en chaque point par la matière qui s'y trouve.*[4] *C'est là la deuxième et la dernière fois dans l'histoire de la cosmologie et de la physique (à la suite de la première grande synthèse de Newton il y a trois siècles), qu'est apparue une vaste vision unificatrice, dans le langage d'un modèle mathématique, de l'ensemble des phénomènes physiques dans l'Univers.*

Cette vision einsteinienne de l'Univers physique a d'ailleurs été débordée à son tour par les événements. « L'ensemble des phénomènes physiques » dont il s'agit de rendre compte a eu le temps de s'étoffer, depuis les débuts du siècle! Il est apparu une multitude de théories physiques, pour rendre compte chacune, avec plus ou moins de succès, d'un paquet limité de faits, dans l'immense capharnaüm de tous les « faits observés ». Et on attend

---

pourtant déjà «en l'air», avec la théorie de Maxwell et les idées de Lorenz). Le pas essentiel ici était non de nature technique, mais bien « philosophique » : se rendre compte que la notion de simultanéité pour des événements éloignés n'avait aucune réalité expérimentale. C'est ça, la « constatation enfantine », le « mais l'Empereur est nu ! », qui a fait franchir ce fameux « cercle impérieux et invisible qui limite un Univers ». . .

(3) Il s'agit surtout de la notion de « variété riemanienne », et du calcul tensoriel sur une telle variété.

(4) Un des traits les plus frappants qui distingue ce modèle du modèle euclidien (ou newtonien) de l'espace et du temps, et aussi du tout premier modèle d'Einstein («relativité restreinte»), c'est que la forme topologique globale de l'espace-temps reste indéterminée, au lieu d'être prescrite impérativement par la nature même du modèle. La question de savoir quelle est cette forme globale, me paraît (en tant que mathématicien) l'une des plus fascinantes de la cosmologie.

toujours le gamin audacieux, qui trouvera en jouant la nouvelle clef (s'il en est une. . .), le « modèle gâteau » rêvé, qui veuille bien « marcher » pour sauver tous les phénomènes à la fois. . .

2) L'importante Note de bas de page

Grothendieck met alors ici, en Note de bas de page, le texte essentiel suivant, avec une allusion intéressante à Riemann :

On a appelé « théorie unitaire » une telle théorie hypothétique, qui arriverait à «unifier» et à concilier la multitude de théories partielles dont il a été question. J'ai le sentiment que la réflexion fondamentale qui attend d'être entreprise, aura à se placer sur deux niveaux différents :

(i) Une réflexion de nature « philosophique », sur la notion même de «modèle mathématique» pour une portion de la réalité. Depuis les succès de la théorie newtonienne, c'est devenu un axiome tacite du physicien qu'il existe un modèle mathématique (voire même, un modèle unique, ou « le » modèle) pour exprimer la réalité physique de façon parfaite, sans «décollement» ni bavure.

Ce consensus, qui fait loi depuis plus de deux siècles, est comme une sorte de vestige fossile de la vivante vision d'un Pythagore que « Tout est nombre». Peut-être est-ce là le nouveau «cercle invisible», qui a remplacé les anciens cercles métaphysiques pour limiter l'Univers du physicien (alors que la race des «philosophes de la nature» semble définitivement éteinte, supplantée haut-la-main par celle des ordinateurs . . .). Pour peu qu'on veuille bien s'y arrêter ne fût-ce qu'un instant, il est bien clair pourtant que la validité de ce consensus-là n'a rien d'évident. Il y a même des raisons philosophiques très sérieuses, qui conduisent à le mettre en doute a priori, ou du moins, à prévoir à sa validité des limites très strictes.

Ce serait le moment ou jamais de soumettre cet axiome à une critique serrée, et peut-être même, de « démontrer », au-delà de tout doute possible, qu'il n'est pas fondé : qu'il n'existe pas de modèle mathématique rigoureux unique, rendant compte de l'ensemble des phénomènes dits «physiques» répertoriés jusqu'à présent.

Une fois cernée de façon satisfaisante la notion même de «modèle mathématique», et celle de la « validité » d'un tel modèle (dans la limite de telles « marges d'erreur » admises dans les mesures faites), la question d'une « théorie unitaire » ou tout au moins celle d'un « modèle optimal » (en un sens à préciser) se trouvera enfin clairement posée. En même *temps, on aura sans doute une idée plus claire aussi du degré d'arbitraire qui est attaché (par nécessité, peut-être) au choix d'un tel modèle.*

(ii) C'est après une telle réflexion seulement, il me semble, que la question « technique » de dégager un modèle explicite, plus satisfaisant que ses devanciers, prend tout son sens. Ce serait le moment alors, peut-être, de se dégager d'un deuxième axiome tacite du physicien, remontant à l'antiquité, lui, et profondément ancré dans notre mode de perception même de l'espace : c'est celui de la nature continue de l'espace et du temps (ou de l'espace-temps), du « lieu » donc où se déroulent les « phénomènes physiques ».

Il doit y avoir déjà quinze ou vingt ans, en feuilletant le modeste volume constituant l'œuvre complète de Riemann, j'avais été frappé par une remarque de lui « en passant ». Il y fait observer qu'il se pourrait bien que la structure ultime de l'espace soit « discrète », et que les représentations « continues » que nous nous en faisons constituent peut-être une simplification (excessive peut-être, à la longue . . .) d'une réalité plus complexe ; que pour l'esprit humain, « le continu » était plus aisé à saisir que « le discontinu », et qu'il nous sert, par suite, comme une « approximation » pour appréhender le discontinu. C'est là une remarque d'une pénétration surprenante dans la bouche d'un mathématicien, à un moment où le modèle euclidien de l'espace physique n'avait jamais encore été mis en cause ; au sens strictement logique, c'est plutôt le discontinu qui, traditionnellement, a servi comme mode d'approche technique vers le continu.

Les développements en mathématique des dernières décennies ont d'ailleurs montré une symbiose bien plus intime entre structures continues et discontinues, qu'on ne l'imaginait encore dans la première moitié de ce siècle. Toujours est-il que de trouver un modèle « satisfaisant » (ou, au besoin, un ensemble de tels modèles, se « raccordant » de façon aussi satisfaisante que possible . . .), que celui-ci soit « continu », « discret » ou de nature « mixte » - un tel travail mettra en jeu sûrement une grande imagination conceptuelle, et un flair consommé pour appréhender et mettre à jour des structures mathématiques de type nouveau. Ce genre d'imagination ou de « flair » me semble chose rare, non seulement parmi les physiciens (où Einstein et Schrödinger semblent avoir été parmi les rares exceptions), mais même parmi les mathématiciens (et là je parle en pleine connaissance de cause).

Pour résumer, je prévois que le renouvellement attendu (s'il doit encore venir . . .) viendra plutôt d'un mathématicien dans l'âme, bien informé des grands problèmes de la physique, que d'un physicien. Mais surtout, il y faudra un homme ayant « l'ouverture philosophique » pour saisir le *nœud du problème. Celui-ci n'est nullement de nature technique, mais bien un problème fondamental de « philosophie de la nature ».*

COMMENTAIRE 1 : **Cette Note de bas de page est bien en relation avec notre propos ; en particulier au niveau des deux passages suivants :**

Ce serait le moment ou jamais de soumettre cet axiome à une critique serrée, et peut-être même, de « démontrer », au-delà de tout doute possible, qu'il n'est pas fondé : qu'il n'existe pas de modèle mathématique rigoureux unique, rendant compte de l'ensemble des phénomènes dits « physiques » répertoriés jusqu'à présent.

puis, un peu plus loin :

Ce serait le moment alors, peut-être, de se dégager d'un deuxième axiome tacite du physicien, remontant à l'antiquité, lui, et profondément ancré dans notre mode de perception même de l'espace : c'est celui de la nature continue de l'espace et du temps (ou de l'espace-temps), du « lieu » donc où se déroulent les « phénomènes physiques ».

Fin de la Note de bas de page. Ensuite, Grothendieck poursuit de la façon suivante, plus personnelle et en revenant aux aspects mathématiques de la physique contemporaine :

3) Suite du texte de Grothendieck

La comparaison entre ma contribution à la mathématique de mon temps, et celle d'Einstein à la physique, s'est imposée à moi pour deux raisons : l'une et l'autre œuvre s'accomplit à la faveur d'une mutation de la conception que nous avons de « l'espace » (au sens mathématique dans un cas, au sens physique dans l'autre) ; et l'une et l'autre prend la forme d'une vision unificatrice, embrassant une vaste multitude de phénomènes et de situations qui jusque là apparaissaient comme séparés les uns des autres. Je vois là une parenté d'esprit évidente entre son œuvre[5] et la mienne. Cette parenté ne me semble nullement contredite par une différence de « substance » évidente. Comme je l'ai déjà laissé entendre tantôt, la mutation einsteinienne concerne la notion d'espace physique, alors qu' Einstein puise dans l'arsenal des notions mathématiques déjà connues, sans avoir jamais besoin de l'élargir, voire de le bouleverser. Sa contribution

(5) Je ne prétends nullement être familier de l'œuvre d'Einstein. En fait, je n'ai lu aucun de ses travaux, et ne connais ses idées que par ouï-dire et très approximativement. J'ai pourtant l'impression de discerner « la forêt » , même si je n'ai jamais eu à faire l'effort de scruter aucun de ses arbres. . .

a consisté à dégager, parmi les structures mathématiques connues de son temps, celles qui étaient le mieux aptes à servir de « modèles » au monde des phénomènes physiques, en lieu et place du modèle moribond légué par ses devanciers. En ce sens, son œuvre a bien été celle d'un physicien, et au delà, celle d'un « philosophe de la nature », au sens où l'entendaient Newton et ses contemporains. Cette dimension « philosophique » est absente de mon œuvre mathématique, où je n'ai jamais été amené à me poser de question sur les relations éventuelles entre les constructions conceptuelles « idéales », s'effectuant dans l'Univers des choses mathématiques, et les phénomènes qui ont lieu dans l'Univers physique (voire même, les événements vécus se déroulant dans la psyché). Mon œuvre a été celle d'un mathématicien, se détournant délibérément de la question des « applications » (aux autres sciences), ou des « motivations » et des racines psychiques de mon travail. D'un mathématicien, en plus, porté par son génie très particulier à élargir sans cesse l'arsenal des notions à la base même de son art. C'est ainsi que j'ai été amené, sans même m'en apercevoir et comme en jouant, à bouleverser la notion la plus fondamentale de toutes pour le géomètre : celle d'espace (et celle de « variété »), c'est à dire notre conception du « lieu » même où vivent les êtres géométriques. La nouvelle notion d'espace (comme une sorte d'« espace généralisé », mais où les points qui sont censés former l'« espace » ont plus ou moins disparu) ne ressemble en rien, dans sa substance, à la notion apportée par Einstein en physique (nullement déroutante, elle, pour le mathématicien). La comparaison s'impose par contre avec la mécanique quantique découverte par Schrödinger. [6]

Dans cette mécanique nouvelle, le « point matériel » traditionnel disparaît, pour être remplacé par une sorte de « nuage probabiliste », plus ou moins dense d'une région de l'espace ambiant à l'autre, suivant la « probabilité » pour que le point se trouve dans cette région. On sent bien, dans cette optique nouvelle, une « mutation » plus profonde encore dans nos façons de concevoir les phénomènes mécaniques, que dans celle incarnée par le modèle d'Einstein - une mutation qui ne consiste pas à remplacer simplement un modèle mathématique un peu étroit aux entournures, par un autre similaire mais taillé plus large ou mieux ajusté. Cette fois, le modèle nouveau ressemble si peu aux bons vieux modèles traditionnels, que même le mathématicien grand spécialiste de mécanique a dû se sentir dépaysé soudain, voire perdu (ou outré. . .). Passer de la mécanique de New-

(6) Je crois comprendre (par des échos qui me sont revenus de divers côtés) qu'on considère généralement qu'il y a eu en ce siècle trois « révolutions » ou grands bouleversements en physique : la théorie d'Einstein, la découverte de la radio-activité par les Curie, et l'introduction de la mécanique quantique par Schrödinger.

ton à celle d'Einstein doit être un peu, pour le mathématicien, comme de passer du bon vieux dialecte provençal à l'argot parisien dernier cri. Par contre, passer à la mécanique quantique, j'imagine, c'est passer du français au chinois. Et ces « nuages probabilistes », remplaçant les rassurantes particules matérielles d'antan, me rappellent étrangement les élusifs « voisinages ouverts » qui peuples les topos, tels des fantômes évanescents, pour entourer des « points » imaginaires, auxquels continue à se raccrocher encore envers et contre tous une imagination récalcitrante. . .

COMMENTAIRE 2 : **Ce texte d'Alexandre Grothendieck évoquant, depuis les travaux d'Einstein, la multitude des théories physiques ainsi que les présupposés des physiciens concernant la légitimité de l'utilisation des mathématiques classiques, conforte tout à fait l'approche concrète et élémentaire que nous allons essayer de donner en détail pour poser les bases d'une réflexion.**

Malheureusement, si un aussi grand esprit n'a (sauf erreur et à part peut-être une allusion à la mécanique quantique et aux « topos ») donné aucune piste concrète, c'est bien qu'un énorme travail conceptuel est à entreprendre. □

Chapitre I

Citations de textes de physiciens Commentaires

Nous allons en donner huit, sans prétendre que ce choix soit optimal ni qu'il soit suffisamment actualisé, vu le nombre considérable d'articles sur ces sujets. Ces textes s'adressaient à des non spécialistes. Les trois premières citations (Smolin, § 1) ; Moyer, § 2) ; Tong, § 3)) concernent le point capital, dans la relation physique/mathématique illustrée par le titre, sur la « structure ensembliste » du monde. Les trois suivantes (Zito, § 4) ; Haroche, § 5) ; Vedral, § 6)) concernent les notions de temps et d'espace, l'intrication posant le problème d'une non-localité appelant peut-être un contexte mathématique adapté (voir un panorama de ces questions dans [AG], [Ca], [De5], [Es1], [Es2], [Ha], [I], [La], [Mas], [MQ], [Pen], [Sm2], [Sm3], [Ro], [TW], [T1], [T2] entre autres). Enfin, celle de Schrödinger (§ 7)) :

http://www.universalis.fr/encyclopedie/erwin-schrodinger/,

par Pierre Costabel, montre un aspect précurseur sur ces questions qui sont reprises dans la dernière citation due à Penrose, § 8).

Commentaire 3 : **Une première difficulté est l'usage ambigu des mots «discret» et «continu» par les physiciens ; en effet, ce sont plus des notions ensemblistes que topologiques, alors que pour le mathématicien ce sont seulement des notions topologiques. Au plan ensembliste en physique, discret signifie plutôt de cardinal fini (au moins localement), les éléments de l'ensemble considéré étant des entités isolées (la seule topologie raisonnable étant la topologie discrète pour laquelle tout point est un ouvert), ce qui pose la question de la nature de ces entités, mais c'est un autre problème. Pour « continu » en physique, il faut entendre tout ou partie de $\mathbb{R}^n$ et des objets qui s'en déduisent**

(donc ensembles infinis ayant la puissance du continu, cf. § 5) pour la notion de cardinal d'un ensemble).

L'aspect topologique général (presque tout le temps absent des textes de Physique sauf pour les aspects ordinaires de «métrique = distance» et «mesures = grandeurs») est tout à fait différent : l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels peut être muni de la topologie discrète. Un ensemble naturellement discret comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers usuels peut être muni de topologies non discrètes comme la topologie p-adique (p premier). Le Chapitre IX porte sur des considérations élémentaires de topologie dans des cas très simples, comme l'anneau $\mathbb{Z}$ ou le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, ce qui peut permettre d'élargir la perception figée que l'on a du « fond », en général assimilé à une partie de l'espace géométrique euclidien réel.

Aussi nous ne considèrerons que l'aspect ensemble fini, points isolés, du vocable physique de discret (lequel est implicitement associé à la topologie discrète).

Quant aux ensembles de cardinal infini ayant la puissance du continu (comme $\mathbb{R}$), nous parlerons plutôt de « continuum physique » (ou continuum) quelle qu'en soit la topologie. Il en résulte alors que «discret vs continuum» représente une alternative en physique, ce qui est a priori un peu court. On rencontre évidemment dans les textes de physique le terme « discontinu » par opposition à « continu » ; de la même façon qu'une fonction de variable réelle (donc définie sur un continuum) peut être discontinue au sens de la topologie, le sens de discontinu utilisé par les physiciens doit être rattaché en général à l'idée de discret.

On notera enfin qu'en physique on ne rencontre aucun ensemble dénombrable comme $\mathbb{Q}$, lequel est non discret pour la distance usuelle, mais où toute partie finie est discrète. □

1) Lee Smolin : Des atomes d'espace et de temps

D'après (PLS 316, Février 2004). *Au cours des dernières décennies, des physiciens et des mathématiciens se sont demandé si l'espace n'était pas, lui aussi, constitué d'entités discrètes. Est-il continu, comme nous l'avons appris à l'école, ou ressemble-t-il davantage à un morceau d'étoffe, tissé de fibres distinctes ?*

Si nous sondions l'espace à des échelles suffisamment petites, découvririons-nous des « atomes » d'espace, de minuscules volumes irréductibles, impossibles à diviser en constituants plus petits ? Et qu'en est-il du temps ? Le monde physique change-t-il de façon continue, ou, au contraire, évolue-t-il par bonds minuscules, un peu comme un ordinateur ?

Au cours des 16 dernières années, pour tenter de répondre à ces questions, les physiciens ont élaboré une théorie nommée gravitation quantique à boucles (loop quantum gravity). Cette dernière prédit que l'espace et le temps sont effectivement constitués d'entités fondamentales discrètes, et les calculs faits dans ce cadre révèlent un monde à la fois simple et élégant.

La gravitation quantique à boucles a éclairé d'une façon nouvelle certains phénomènes étranges, tels les trous noirs et le Big Bang. De surcroît, nous pourrons la mettre à l'épreuve de l'expérience : elle prédit les résultats d'expériences que nous pourrons réaliser dans un futur proche, et qui nous permettront de savoir si oui ou non les atomes d'espace-temps existent (...).

Parmi les différentes approches relevant de cette stratégie, citons la théorie des twisteurs [de Roger Penrose], *la géométrie non commutative* [de Alain Connes], *ou encore la supergravitation* [de Volkov-Kaluza-Klein]. *Aujourd'hui, la voie la mieux explorée par les physiciens est celle de la théorie des cordes selon laquelle l'espace a six ou sept dimensions, pour le moment inobservées, en plus des trois qui nous sont familières.*

COMMENTAIRE 4 : **On voit déjà dans ce texte un certain flou ensembliste puisque sur un commentaire portant sur des aspects discret** « *entités fondamentales discrètes* » **est évoqué** « *un espace a six ou sept dimensions* » **qui évoque plutôt un continuum.** □

La théorie des cordes prédit également un grand nombre de nouvelles particules élémentaires et de forces fondamentales dont l'existence n'est encore qu'hypothétique. [1]

Certains physiciens pensent que la théorie des cordes serait elle-même incluse dans une théorie plus vaste, nommée théorie M, mais aucune définition précise n'en a encore été donnée. Pour toutes ces raisons, de nombreux physiciens et mathématiciens pensent qu'il faut explorer de nouvelles pistes, et la gravitation quantique à boucles en est une. [2]

---

(1) Pour un tour d'horizon général sur la notion classique de particule, voir également l'article suivant par Maurice Jacob et Bernard Pire :
http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires-caracteres-generaux/

(2) Voir aussi le point sur ces questions dans *La quête d'une théorie unifiée des interactions*, PLS 400, Février 2011 (*Monsieur Unification* : Entretien avec Steven Weinberg, page 62.

Au milieu des années 1980, nous avons été plusieurs, dont Abhay Ashtekar, de l'Université de Pennsylvanie, Ted Jacobson, de l'Université du Maryland, et Carlo Rovelli, de l'Université de Méditerranée à Marseille, à réexaminer les tentatives de quantification de la relativité générale, à l'aide des techniques mathématiques standards. Nous savions que tous les résultats infructueux obtenus dans les années 1970 reposaient sur l'hypothèse d'un espace continu, quelle que soit l'échelle considérée (...). Et si cette hypothèse était fausse ? Les anciens calculs seraient à revoir de fond en comble.

Nous avons commencé par chercher une façon de faire les calculs sans supposer que l'espace est lisse et continu. De plus, nous avons veillé à ne faire aucune supposition qui aille au-delà des principes bien établis par l'expérience et déjà contenus dans la relativité générale et dans la mécanique quantique. En particulier, nous avons conservé deux des principes clés de la relativité générale. Le premier de ces principes est l'indépendance d'arrière plan, stipulant que la géométrie de l'espace-temps n'est pas fixe, mais qu'il s'agit, au contraire, d'une quantité dynamique en perpétuelle évolution. Pour la déterminer, on doit résoudre certaines équations qui décrivent tous les effets de la matière et de l'énergie. A ce propos, la théorie des cordes, telle qu'elle est formulée aujourd'hui, n'obéit pas à ce principe. Les équations qui décrivent les cordes opèrent dans un espace-temps classique (non quantique) prédéterminé.

Le second principe, désigné par le terme d'invariance par difféomorphisme, est très lié à l'indépendance de l'arrière-plan, et se rapporte aux coordonnées dans l'espace d'un événement : on peut choisir n'importe quelle coordonnée d'espace et de temps. Ce système de coordonnées s'apparente à la longitude et à la latitude utilisées à la surface de la Terre, mais sous une forme généralisée à un espace-temps comportant quatre dimensions. Cette invariance garantit que les équations d'une théorie conservent la même forme dans tout système de coordonnées bien choisi. Un point de l'espace-temps n'est défini que par les événements physiques qui s'y déroulent, non par un jeu spécial de coordonnées (aucune coordonnée n'est «spéciale»). L'invariance par difféomorphisme est un outil puissant qui a guidé Einstein lors des premiers développements de la relativité générale.

En combinant ces deux principes aux techniques standards de la mécanique quantique, nous avons élaboré un langage mathématique grâce auquel il nous fut possible de déterminer si l'espace est discret ou con-

L'insaisissable théorie unifiée par Stephen Hawking et Leonard Mlodinow, page 65. *Une théorie géométrique du Tout* par Garrett Lisi et James Weatherall, page 68).

tinu. Pour notre plus grande joie, les calculs ont montré que l'espace est quantifié. Nous venions de poser les bases de la théorie de la gravitation quantique à boucles, ce qualificatif provenant du fait que certains des calculs font apparaître de petites boucles dans l'espace-temps. Depuis, ces calculs ont été refaits par de nombreux théoriciens utilisant une large gamme de méthodes différentes. Avec les années, l'étude de la gravitation quantique à boucles est devenue un domaine de recherches en plein essor, auquel travaillent de nombreuses équipes dans le monde. [3]

COMMENTAIRE 5 : **Noter l'extrême difficulté de ce texte à préciser les questions de cardinalités :** « *Espace lisse et continu* », « *Un point de l'espace-temps n'est défini que par les événements physiques qui s'y déroulent, non par un jeu spécial de coordonnées* », « *Les calculs ont montré que l'espace est quantifié. Nous venions de poser les bases de la théorie de la gravitation quantique à boucles, ce qualificatif provenant du fait que certains des calculs font apparaître de petites boucles dans l'espace-temps* », « *on doit résoudre certaines équations* », **. . .**

On peut conseiller le livre de Lee Smolin [Sm2] qui retrace l'histoire de ces idées. Comme nous allons le voir, il y a plusieurs adeptes de ce point de vue « discret », mais aussi, comme celui de David Tong en 2013 (cf. § 3)), des avis divergents moins crédibles.

Ceci dit, même les tenants d'un espace-temps quantifié utilisent un bagage mathématique classique a priori antithétique, et les cordes ou boucles sont encore vues comme de petits objets, localement des continuum (comme le segment de nombres réels $[0, 1[$**). Enfin cette « discrétisation » revient à isoler des mini-objets de type continuum conférent à l'espace des propriétés spécifiques. Le choix est alors vasts comme on va le voir.** □

2) Michæl Moyer : L'espace est-il discret ?

D'après (PLS 416, Juin 2012). *Le monde est-il flou ? Ce n'est pas une métaphore. Pour Craig Hogan, physicien des particules à l'Université de Chicago et directeur du Centre d'astroparticules du Fermilab, dans l'Illinois, si nous parvenions à observer les plus petites subdivisions de*

(3) Voir aussi l'article suivant, par Bernard Romney, retraçant l'historique des travaux sur la gravitation quantique à boucles des physiciens Abhay Ashtekar, Carlo Rovelli et Lee Smolin :
http://www.larecherche.fr/parution/mensuel-458 &
http://www.larecherche.fr/parution/mensuel-411.

l'espace et du temps, nous découvririons un univers en perpétuelle effervescence, un incessant bourdonnement de fluctuations. Cette agitation n'est pas celle de particules qui apparaissent et disparaissent, ni d'autres types de «mousses quantiques» imaginés jusqu'ici. Ce bruit serait la marque d'un espace discontinu qui, au lieu d'être une toile de fond bien lisse à la danse des particules, serait au contraire constitué de petits morceaux irréductibles : un univers discret.

A la plus petite échelle possible, l'échelle de Planck $(6,62606957\,.\,10^{-34}$ *mètres), les deux piliers de la physique du XXe siècle, la théorie quantique et la relativité générale, semblent irréconciliables. C'est à cette même échelle que des physiciens ont développé depuis quelques décennies une description de l'Univers en termes d'information, c'est-à-dire de bits (des 0 et des 1). Selon cette théorie dite holographique, c'est l'information, et non pas la matière et l'énergie, qui constitue l'essence même de l'Univers. De cette information émerge le cosmos.*

C. Hogan a entrepris de tester si la nature discrète de l'espace est une réalité. Il a ainsi conçu une expérience pour explorer l'agitation intrinsèque de l'espace aux échelles les plus fondamentales. Son dispositif, surnommé holomètre, met en jeu un interféromètre extrêmement précis installé sur le campus du Fermilab. Il tient dans un simple bunker et un tube épais comme le poing, où voyageront des faisceaux laser, court sur 40 mètres entre le bunker et une remise. Il n'est pas certain que cette expérience livre des résultats satisfaisants.

C'est une plongée dans l'inconnu, dont la modestie de moyens tranche avec ceux de la physique des particules actuelle (...).

Commentaire 6 : **On peut faire les mêmes observations que dans le Commentaire précédente au sujet de :** « *Les plus petites subdivisions de l'espace et du temps* », « *Ce bruit serait la marque d'un espace discontinu qui, au lieu d'être une toile de fond bien lisse à la danse des particules, serait au contraire constitué de petits morceaux irréductibles : un univers discret* », **etc.**
Par contre le texte « *C'est l'information, et non pas la matière et l'énergie, qui constitue l'essence même de l'Univers. De cette information émerge le cosmos* » **met en jeu la notion d'** « **émergence** » **qui nous paraît importante sur un plan plus axiomatique offrant plus de possibilités ; beaucoup de physiciens et mathématiciens vont dans ce sens moins naïf que l'idée basique de** « **fond** » **identifié depuis des millénaires à un continuum banal.**

On pourra se reporter au Chapitre V, où sont exposés des principes mathématiques (théorème de dualité diophantienne de Kronecker) susceptibles de susciter des expériences de physique semblables à celle de C. Hogan afin de tester ce « substrat » ou « fond » formant notre monde, ceci à partir des phénomènes mathématiques « sensibles » que sont les propriétés diophantiennes des nombres (ou grandeurs). □

3) David Tong : Quantique mais non discret

D'après (PLS 423, Janvier 2013). *Bon nombre de physiciens théoriciens soutiennent une vision pointilliste du monde aux plus petites échelles. Toutefois, un examen des lois de la nature suggère un monde physique continu.*

A la fin du XIXe siècle, le mathématicien allemand Leopold Kronecker déclarait : « Dieu a créé les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme ». Il pensait que les nombres entiers jouent un rôle fondamental en mathématiques. Pour les physiciens d'aujourd'hui, cette citation a un autre retentissement. Elle fait écho à une vision qui s'est imposée ces dernières décennies, à savoir que la nature serait essentiellement discrète et non continue, que les éléments de base de la matière et de l'espace-temps peuvent être comptés un par un. Cette idée remonte aux atomistes de la Grèce ancienne, et elle nous parle davantage encore à l'ère numérique. De nombreux physiciens en sont arrivés à se représenter le monde naturel comme un immense ordinateur décrit par des bits d'information, et les lois de la physique comme un algorithme, semblable à la pluie de chiffres verts que Neo voit à la fin du film Matrix (1999).

Commentaire 7 : **Cette référence à Kronecker (pur hasard vis à vis des mentions que nous faisons de ses importants travaux diophantiens) peut faire bondir le mathématicien par la façon d'attribuer les mérites respectifs !**

Comme on le verra au § c), la construction des nombres réels repose en effet sur les nombres entiers qui sont à la base de toute construction (celle des « nombres p-adiques » aussi) et le problème est ailleurs à notre avis. □

Mais est-ce vraiment ainsi que les lois de la physique sont faites ? Même si cela n'est pas dans l'air du temps, je suis loin d'être le seul scientifique à penser que la réalité est au fond continue plutôt que discrète. Selon *cette vision, le monde est un continuum : zoomez tant que vous voudrez, vous ne trouverez pas d'éléments de base irréductibles. Les quantités physiques ne sont pas des nombres entiers, mais des nombres réels, des nombres continus avec une infinité de chiffres après la virgule.*

Les fans de Matrix seront déçus de l'apprendre, mais les lois actuelles de la physique présentent certaines caractéristiques que personne ne sait simuler sur ordinateur, quelle que soit sa capacité de mémoire. Il est essentiel d'intégrer cet aspect pour développer une théorie physique complètement unifiée.

Commentaire 8 : **On pourra se reporter au Chapitre IV puis aux « expérimentations diophantiennes » du Chapitre V (reposant d'ailleurs sur le théorème diophantien de Kronecker !), pour analyser les conséquences redoutables d'une telle affirmation, que nous ne partageons pas, et qui nous semble résulter d'une analyse pragmatique des mathématiques classiques plutôt que de leur réalité axiomatique. Sans parler** «*des nombres continus avec une infinité de chiffres après la virgule*» **qui dénote une certaine naïveté pour définir $\mathbb{R}$.**

Si Dieu a crée d'emblée les nombres réels et les continuum, il savait ce qu'il faisait en donnant à l'Univers les propriétés cantoriennes diaboliques démontrées par l'Homme (cf. § 5) ; voir également [De1], [De2], [De4], pour une analyse détaillée des implications logiques des constructions ensemblistes où les infinis et des axiomes a priori éloignés de la physique sont nécessaires).
□

Suivent ensuite de nombreux éléments historiques donnés par David Tong ; il s'agit essentiellement des nombreux débats entre physiciens, philosophes et mathématiciens sur ces questions. Ensuite David Tong poursuit ainsi :

L'atome est analogue à un tuyau d'orgue, qui produit une série discrète de notes alors que le mouvement de l'air est continu. Au moins en ce qui concerne l'atome, la leçon est claire : Dieu n'a pas fait les nombres entiers ; il a fait les nombres réels, et le reste est le fait de l'équation de Schrödinger. En d'autres termes, les entiers ne sont pas des hypothèses de la théorie, comme le pensait Bohr, mais des conséquences. Les entiers sont un exemple de ce que les physiciens appellent une quantité émergente.

Dans cette perspective, le terme de mécanique «quantique» est impropre : la théorie ne contient pas de quanta (c'est-à-dire des quantités discrètes) dans sa formulation. Dans des systèmes tels que l'atome d'hydrogène, *les processus décrits par la théorie engendrent du discret à partir de la continuité sous-jacente (...).*

COMMENTAIRE 9 : **Cet aspect inversé, résumé par la phrase de David Tong :** « *les processus décrits par la théorie engendrent du discret à partir de la continuité sous-jacente* », **n'est pas sans intérêt logique, mais n'implique pas nécessairement une « continuité = continuum » au sens des cardinalités ensemblistes. Le hiatus est ici : le « discret » est fini ou infini dénombrable (que l'on peut considérer comme du discret fini évolutif), et le « continu » (même vu aussi localement que l'on veut) reste un continuum infini non dénombrable.**

En outre, on reviendra sur ces notions de « continu = continuum » au sens des cardinalités et de « continu = régularité des processus » au sens topologique qui évoque plutôt le cadre des nombres réels ou des objets qui s'en déduisent, objets que nous appellerons des $\mathbb{R}$-objets (cf. § d)). □

Même si nos théories actuelles supposent que la réalité est continue, beaucoup de mes collègues physiciens pensent malgré tout qu'une réalité discrète est sous-jacente. Ils mettent en avant des exemples montrant comment la continuité peut émerger de la quantification. Aux échelles macroscopiques de notre expérience quotidienne, l'eau contenue dans un verre semble lisse et continue. C'est seulement quand on l'examine de beaucoup plus près que l'on discerne les constituants atomiques. Un mécanisme de ce type pourrait-il être à la base de la physique ? Si nous regardions à un niveau plus profond, les champs quantiques, voire l'espace-temps lui-même, révéleraient-ils eux aussi une structure sous-jacente discrète ? Nous ignorons la réponse à cette question, mais 40 années de tentatives de simulation du modèle standard sur ordinateur livrent un indice.

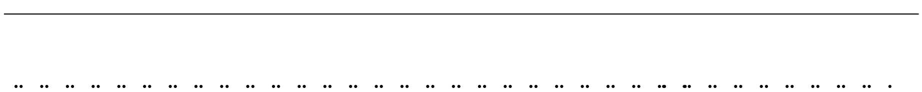
Pour réaliser une telle simulation, il faut tout d'abord prendre les équations, exprimées en termes de grandeurs continues, et en trouver une formulation discrète, compatible avec les bits d'information que les ordinateurs manipulent. Or en dépit de plusieurs décennies d'efforts, personne n'y est encore parvenu. Et cela constitue l'un des problèmes ouverts les plus importants de la physique théorique, bien que ce soit rarement évoqué.

COMMENTAIRE 10 : **Nous aurons l'occasion de montrer les relatives confusions que génèrent cette partie du texte dans l'association arbitraire :**

Continuum & Analyse réelle
vs
Espaces discrets & Algorithmique.

Dire : « *Pour réaliser une telle simulation* [du modèle standard]*, il faut tout d'abord prendre les équations, exprimées en termes de grandeurs continues, et en trouver une formulation discrète* » **est totalement illogique car précisement, la théorie algébrique des nombres (et celle des systèmes dynamiques) montrent clairement qu'une discrétisation, au sens de l'analyse numérique classique (calcul approché d'un profil d'aile d'avion, ou prévisions météorologiques, à partir d'équations aux dérivées partielles par exemple), ne rend plus compte de certains phénomènes au demeurant « discrets » mais « évolutifs » voire « chaotiques » (cf. Chapitre V avec les exemples numériques illustrant les problèmes diophantiens mis en évidence par Kronecker).**

Le passage d'un continuum à une discrétisation en ce sens, illustré par la figure ci-dessous, montre une différence de nature. C'est comme remplacer π par l'une de ses approximations : cela fait passer d'un nombre transcendant à un nombre rationnel aux propriétés totalement différentes (quelle que soit l'approximation numérique).



Autrement dit un tel concept de discrétisation tue littéralement le phénomène étudié et semble voué exclusivement à l'étude approchée de phénomènes macroscopiques. Il n'est alors pas étonnant que David Tong constate l'échec d'une telle procédure. □

Abordons une citation introduisant le temps, sous un angle analogue continuum vs discret, notion qui pose elle-même la question de son existence au moins sous sa forme intuitive et aussi sous sa forme mathématique (réversibilité du temps comme variable réelle naïve). D'ailleurs, l'alternance des propositions est incessante puisque récemment Max Tegmark [T2] réaffirme avec force l'existence d'un temps continu comme base fondamentale de la physique !

4) Marco Zito : Qu'est-ce que le temps ?

D'après (Le monde Science & Techno, 2 mars 2013). *Depuis l'Antiquité, de saint Augustin à Heidegger, les philosophes s'interrogent sur cette notion, simple au premier abord et impénétrable à une analyse plus détaillée. En parallèle, la science avance elle aussi dans la caractérisation du temps. Ainsi Einstein a-t-il bouleversé la conception classique avec sa théorie de la relativité.* [4]

Il est moins connu que la physique quantique a jeté une lumière nouvelle sur cette question, associant à chaque particule une onde, selon la célèbre dualité onde-corpuscule. A chaque onde de ce type est associée une fréquence particulière, proportionnelleà la masse de la particule. Cette hypothèse audacieuse fut formulée pour la première fois par Louis de Broglie, en 1924, dans sa thèse doctorale, et lui valut cinq ans plus tard le prix Nobel. Voici sa formulation :

« On peut donc concevoir que par suite d'une grande loi de la Nature, à chaque morceau d'énergie de masse propre m_0 soit lié un phénomène périodique de fréquence ν_0 telle que l'on ait : $h\,\nu_0 = m_0\,c^2$ » *(ici, h est la constante de Planck et c la vitesse de la lumière).*

Jusqu'ici, cela est resté dans le domaine de la théorie : pour mesurer le temps, on a recours à un système de plusieurs particules. Ainsi la notion d'année est-elle liée à l'orbite terrestre autour du Soleil. Les horloges atomiques sont calées sur les fréquences entre niveaux énergétiques des électrons dans un atome.

Une équipe de Berkeley (Etats-Unis) vient de réaliser une avancée considérable en réalisant une horloge basée sur une seule particule [5]*. Ces chercheurs ont manipulé des atomes isolés de césium qui subissent une série d'impulsions laser. Celles-ci, dans des conditions appropriées, séparent l'onde associée à chaque atome en deux composantes qui sont ensuite amenées à interférer. La condition d'une interférence constructive est liée à la phase de chaque onde, c'est-à-dire à la fréquence intrinsèque de l'atome.*

(4) http://www.universalis.fr/encyclopedie/albert-einstein/, par Michel Paty. Voir aussi les importantes contribution de Poincaré et son étude de 1905 « Sur la dynamique de l'électron » , où il formule, en même temps qu'Einstein, la pleine prise en compte du principe de relativité pour l'électromagnétisme et développe une théorie relativiste (au sens restreint) de la gravitation :
http://www.universalis.fr/encyclopedie/henri-poincare/, par Gérard Besson, Christian Houzel, et Michel Paty.
http://www.larecherche.fr/parution/mensuel-379

(5) A Clock Directly Linking Time to a Particle's Mass, Science, Vol. 339, No. 6119 (2013), pp. 554–557.

En d'autres termes, c'est comme si on avait utilisé l'hypothèse de Broglie pour mesurer un intervalle de temps avec une seule particule (...).

COMMENTAIRE 11 : **Plusieurs paragraphes tiendront compte de ces observations sur le temps et sa remise en question par de nombreux physiciens (cf. §§ 4), 4)) pour son possible caractère de notion émergente, et l'idée qu'en cas de quantification du temps, toutes les quantités seraient interdépendantes en termes quantifiés (cf. § 3)).** □

5) Serge Haroche : La physique quantique

Résumé d'une conférence de Serge Haroche, dont on peut consulter la vidéo sur internet : Université de tous les savoirs, 213ème conférence, 31 Juillet 2000,
http://www.canal-u.tv/video/universite_de_tous_les_savoirs/la_physique_quantique_serge_haroche.1065,
qui introduit les élément actuels de la physique. *La théorie quantique, centrale à notre compréhension de la nature, introduit en physique microscopique les notions essentielles de superpositions d'états et d'intrication quantique, qui nous apparaissent comme « étranges » et contre-intuitives. Les interférences quantiques et la non-localité (conséquences directes du principe de superposition et de l'intrication) ne sont en effet pas observables sur les objets macroscopiques de notre expérience quotidienne.*

Le couplage inévitable de ces objets avec leur environnement détruit très vite les relations de phase entre les états quantiques. C'est le phénomène de la décohérence qui explique pourquoi autour de nous l'étrangeté quantique est généralement voilée.

Pendant longtemps, superpositions, intrication et décohérence sont restés des concepts analysés à l'aide d'« expériences de pensée » virtuelles, dont celle du chat de Schrödinger à la fois mort et vivant est la plus connue (cf. Chapitre XII). A la fin du XXe siècle, les progrès de la technologie ont rendu réalisables des versions de laboratoire simples de ces expériences. On peut maintenant piéger et manipuler des atomes et des photons un par un et construire des systèmes de particules suspendus entre deux états quantiques distincts qui apparaissent ainsi comme des modèles réduits de chats de Schrödinger.

Au delà de la curiosité scientifique et du défi que constitue l'observation de l'étrangeté quantique pour ainsi dire in vivo, ces expériences éclairent *la frontière entre les mondes classique et quantique et ouvrent des perspectives fascinantes d'applications.*

Commentaire 12 : **Ce préambule de Serge Haroche est fondamental et est sans doute le point de départ d'une possible formalisation de la physique (via des mathématiques ?) tenant compte du local et du global. Cet aspect (au-delà du questionnement discret vs continuum) peut mettre en jeu des idées topologiques que nous examinerons plus loin (cf. Chapitre IX).** □

Citons alors plus longuement l'article de Vlatko Vedral reprenant le cas fondamental de l'intrication qui présente une difficulté majeure à tous les niveaux évoqués précédemment.

6) Vlatko Vedral : Effet quantique, effet minuscule ?

D'après (PLS 407, Septembre 2011). *Dans les manuels de physique, la théorie quantique décrit les particules, les atomes, les molécules, bref le monde microscopique, mais céderait le pas à la physique classique à l'échelle des poires, des gens ou des planètes. Il y aurait ainsi, quelque part entre la poire et la molécule, une frontière où prend fin l'étrangeté quantique et où commence le caractère familier des comportements décrits par la physique classique. L'idée que la théorie quantique se limite au monde microscopique est d'ailleurs très répandue dans le grand public. Dans son ouvrage à succès L'Univers élégant, Brian Greene, de l'Université Columbia, écrit par exemple que :*

La théorie quantique « apporte le cadre théorique nécessaire pour comprendre l'Univers aux plus petites échelles ».

La physique classique (c'est-à-dire toute théorie non quantique, donc les théories de la relativité aussi) décrirait l'Univers aux plus grandes échelles. Ce cloisonnement du monde physique est un mythe (...).

La discrétion des phénomènes quantiques à notre échelle ne tient pas à la taille en soi des systèmes, mais à la façon dont ils interagissent. Depuis dix ans, les physiciens multiplient les expériences où se manifestent à l'échelle macroscopique des effets quantiques, dont on s'aperçoit qu'ils sont bien plus présents qu'on ne le soupçonnait. Ils pourraient même jouer un rôle dans nos cellules ! (...).

Vlatko Vedral reprend alors en détail l'expérience de pensée bien connue du chat de Schrödinger qui repose logiquement sur le fait que dans le monde quantique, un atome peut fort bien se trouver dans un état combinant les états « désintégré » et « non désintégré », ce que l'on nomme un état superposé. Et il pose une question de fond : pourquoi les gens ne voient-ils que des chats, soit vivants, soit morts, et pas de chats morts-vivants ? Il poursuit alors sous forme des paragraphes ci-dessous.

a) Des états très fragiles

D'après la vision actuelle, si le monde semble si bien décrit par la physique classique, c'est parce que les interactions complexes d'un objet avec son environnement font très vite disparaître les particularités quantiques. L'information relative à l'état de santé d'un chat, par exemple, gagne rapidement son environnement sous la forme de photons et d'échanges de chaleur. Chaque phénomène quantique peut impliquer des états superposés du système en jeu (mort ou vivant), mais ces états tendent à disparaître. La fuite permanente d'information vers l'environnement est le mécanisme essentiel par lequel les états quantiques de superposition se détruisent, processus nommé décohérence.

Les gros systèmes sont davantage sujets à la décohérence que les petits, tout simplement parce qu'ils laissent échapper plus d'informations. C'est pourquoi les physiciens tendent à associer la théorie quantique au monde microscopique. Dans de nombreux cas, toutefois, la perte d'information par un gros système peut être ralentie ou stoppée, ce qui met alors en évidence l'omniprésence des phénomènes quantiques. Un phénomène quantique par excellence est l'intrication, qui transforme un ensemble de particules isolées en un tout indivisible. Son nom fut introduit en 1935 par Schrödinger dans le même article que celui où il discutait de son chat.

En physique classique, les propriétés d'un système de particules peuvent toujours se ramener aux propriétés individuelles de ses composants. Ce n'est pas le cas avec un système quantique intriqué. Ainsi, un système constitué de deux particules intriquées a un comportement étonnant : même très éloignées, les particules qui le composent continuent à se comporter comme deux parties d'une entité indivisible ; c'est ce qui a conduit Einstein à parler d'« action fantomatique à distance ».

b) Spins intriqués

D'ordinaire, les physiciens parlent de l'intrication de paires de particules élémentaires, tels les électrons. L'une des propriétés des électrons est leur moment cinétique (ou angulaire) intrinsèque, dénommé spin (mot anglais qui signifie tournoyer). En simplifiant, on peut se représenter les électrons *comme de minuscules toupies qui tournent soit dans le sens des aiguilles d'une montre, soit dans le sens inverse, autour d'un axe susceptible de pointer dans n'importe quelle direction : horizontalement, verticalement, à 45 degrés, etc. Pour mesurer le spin d'un électron, il faut d'abord choisir une direction, puis déterminer le sens du spin par rapport à l'axe choisi.*

Supposons que deux électrons se comportent comme le prescrit la physique classique. Faisons alors en sorte que l'un des électrons tourne dans le sens horaire autour d'un axe horizontal, et l'autre tourne dans le sens inverse autour du même axe ; de cette façon, le spin total, c'est-à-dire la somme des spins des deux électrons, est nul. Les axes de rotation des électrons restant fixes dans l'espace, le résultat d'une mesure va dépendre de l'angle entre la direction de mesure et l'axe de rotation des électrons. Si l'on mesure les deux spins selon un axe horizontal, on verra qu'ils tournent dans des directions opposées ; en revanche, une mesure dans la direction verticale ne détectera de rotation pour aucune des particules.

COMMENTAIRE 13 : **Les phrases précédentes (comme dans tous les articles de ce genre avec cette pédagogie) mélangent une situation de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (par le biais des axes usuels de $\mathbb{R}^3$) avec le domaine dont l'ordre de grandeur est celui de la constante de Planck [6], domaine pour lequel des mathématiques de nature discrète (ou peut-être de nature «ultramétrique») sont probablement seules susceptibles de décrire de tels phénomènes.**

C'est en effet tout à fait absurde, car on peut affirmer (ce qui sera précisé dans les chapitres suivants) que le domaine quantique n'est pas la réduction par zoomage suffisant du continuum $\mathbb{R}^3$ qui n'est probablement qu'une version topologiquement approchée de la réalité macroscopique, ce qui fait deux illogismes de suite et tend à redonner une prévalence au « fond » classique en échec. Ceci sera repris au Chapitre II. □

Mais Vlatko Vedral a bien conscience de ce problème et poursuit plus loin :

Il nous faut plutôt chercher à expliquer l'espace et le temps comme des phénomènes émergeant d'une façon ou d'une autre d'une physique fondamentale dénuée de cadre spatio-temporel (...).

Cette idée pourrait nous aider ensuite à réconcilier la physique quantique avec cet autre pilier de la physique qu'est la théorie de la relativité générale d'Einstein, qui décrit la gravitation en termes de géométrie de

(6) http://www.universalis.fr/encyclopedie/max-planck/, par Josef Smolka.

l'espace-temps. La relativité générale suppose que les objets ont des positions bien définies et ne sont jamais à plus d'un endroit à la fois, ce qui est en contradiction avec la physique quantique. De nombreux physiciens, comme Stephen Hawking, de l'Université de Cambridge, pensent que la théorie de la relativité doit céder la place à une théorie plus profonde dans laquelle l'espace et le temps n'existent pas. L'espace-temps classique émergerait de l'intrication quantique par le processus de décohérence.

Une autre possibilité, plus intéressante encore, serait que la gravitation ne soit pas une force en elle-même, mais le bruit résiduel de l'action des autres forces de l'Univers engendré par le caractère flou des phénomènes quantiques. Cette idée de «gravitation induite» remonte aux années 1960 et au physicien et dissident soviétique Andreï Sakharov. Si elle devait se révéler pertinente, alors non seulement la gravitation y perdrait son statut de force fondamentale, mais aussi tous les efforts accomplis pour la « quantifier » seraient vains. Au niveau quantique, la gravitation ne pourrait même pas exister (...).

COMMENTAIRE 14 : **Ce retournement de pensée nous semble salutaire et rejoint deux axes essentiels, à savoir la notion d'émergence et de non-localité qui offrent des paramètres logiques offrant des modèles de pensée plus riches.**

Parlant de l'intrication pour des objets complexes, Vlatko Vedral rapporte les faits suivants qui vont dans le sens des travaux actuels comme ceux cités au § 5), et qui peuvent faire le lien entre des aspects a priori diamétralement opposés (les lois de base de l'Univers et l'extrême complexité du vivant, voire de la conscience souvent mise en jeu par certains scientifiques comme David Bohm (cf. [Mas] ainsi que le § 7))). □

c) Une frontière effaçable

Mais les expériences suggèrent plutôt que la frontière entre le monde classique et le monde quantique n'est pas fondamentale, assez d'ingéniosité expérimentale suffisant à l'effacer. Peu de physiciens pensent aujourd'hui que la physique classique s'impose vraiment à quelque échelle que ce soit. Au contraire, le sentiment général est que si une théorie plus efficace remplace un jour la physique quantique, elle montrera que le monde est encore plus contraire à l'intuition que tout ce que nous avons vu jusqu'à présent (...).

En 2003, une expérience a prouvé que des systèmes de plus grande taille peuvent rester intriqués quand on peut limiter ou contrecarrer la fuite d'information (...). Or, si l'on peut conférer un état intriqué à des solides même lorsqu'ils sont grands et chauds, il n'y a qu'un pas à faire pour se demander si l'intrication pourrait aussi être présente dans les êtres vivants (...).

d) Le rouge-gorge et sa boussole quantique ?

Un tel « organisme quantique » pourrait être Erithacus rubecula, un étonnant petit oiseau, qui migre chaque année entre la Scandinavie et l'Afrique équatoriale. Ce périple de 13 000 kilomètres, le rouge-gorge familier (son nom français) semble l'effectuer sans difficultés et, étonnamment, sans se perdre. Comment fait-il ? Le rouge-gorge a-t-il une sorte de boussole intérieure ?

Dans les années 1970, les époux Wolfgang et Roswitha Wiltschko, de l'Université de Francfort en Allemagne, ont capturé des rouges- gorges ayant migré en Afrique et les ont placés dans un champ magnétique artificiel. Ils ont constaté que les rouges-gorges ne perçoivent pas les inversions de la direction du champ magnétique (ils ne distinguent pas le Nord du Sud), mais qu'ils sont sensibles à l'inclinaison du champ magnétique terrestre, c'est-à-dire à l'angle que font les lignes de champ avec la surface terrestre. C'est, en fait, tout ce dont ils ont besoin pour s'orienter. Or, détail intéressant, les rouges-gorges dont on bande les yeux ne suivent plus le champ magnétique. Cela signifie que si les rouges-gorges ont une boussole interne, elle est dans leurs yeux.

En 2000, un physicien passionné par les oiseaux migrateurs, Thorsten Ritz, alors à l'Université de Floride du Sud, propose avec ses collègues une explication : l'intrication. Selon son idée, inspirée des travaux de Klaus Schulten, de l'Université de l'Illinois, la rétine d'un œil d'oiseau contiendrait une molécule où deux électrons forment une paire intriquée de spin total nul. Une rétine quantique ?

Dans le modèle théorique de T. Ritz, quand cette molécule absorbe un photon de lumière visible, les électrons reçoivent assez d'énergie pour se séparer et devenir ainsi sensibles au champ magnétique terrestre. Si le champ magnétique est incliné, il affecte différemment les deux électrons, créant un déséquilibre qui modifie la réaction chimique subie par la molécule. Des mécanismes chimiques traduisent cette différence en impulsion nerveuse, que le cerveau de l'oiseau transforme en une image du champ magnétique terrestre. L'oiseau est ainsi doté d'un dispositif *d'orientation macroscopique, qui ne relève pas de la physique classique (...).*

COMMENTAIRE 15 : **Sans que cela aide à décider du dilemme discret vs continuum, la très probable réalité de ces phénomènes oblige déjà à repenser la nature des objets mathématiques pour la physique.** □

7) Erwin Schrödinger : Qu'est-ce que la vie ?

Extrait de : «Les quanta et le code de la vie», par Marco Zito, Le monde Science & Techno, 27 Avril 2013. *Schrödinger argumente que tout être vivant capable d'une pensée rationnelle doit être macroscopique (...).*

Toutefois, analysant les mutations génétiques induites par des rayons X, l'auteur conclut que la région sensible d'un gène équivaut à peine à dix fois la distance entre les atomes dans un solide. Comment réconcilier cette miniaturisation extrême et la persistance de ces informations malgré les chocs continuels auxquels ce code est confronté ? (...).

La clé du mystère réside dans la physique quantique, selon laquelle les échanges d'énergie se font avec des sauts, les quanta d'énergie. Atomes et molécules se présentent aussi dans des configurations distinctes et discrètes.

L'auteur propose que le code de la vie soit donc inscrit dans des molécules relativement stables, tel que le saut quantique vers une autre configuration possible mette en jeu une énergie très grande comparée à celle de l'agitation thermique. Cette persistance des informations est possible seulement dans un monde quantique. Si la matière et l'énergie étaient des grandeurs continues comme le suppose la physique classique, la vie ne serait pas possible ! (...).

COMMENTAIRE 16 : **Ce texte précurseur (Seuil 1993) émet déjà un énorme doute sur une Physique décrite dans un continuum. Mais l'auteur se limite à l'aspect discret induit par la mécanique quantique et ne dit rien sur ce que les physiciens appellent « le fond » dont il faut bien dire que, sauf pour certaines théories récentes, il est encore pensé comme l'espace $\mathbb{R}^n$, pour n convenable, vu à n'importe quelle échelle.**

Rien ne s'oppose logiquement aux quanta à condition de ne pas mélanger sans précautions l'aspect continuum avec l'aspect d'intégralité (partie entière d'un nombre réel par exemple) de certaines grandeurs (l'énergie ici). □

Il est difficile d'aborder l'ensemble des sujets précédents sans citer le monument édifié par Roger Penrose [Pen]. On y trouve les mathématiques classiques directement utilisables pour la physique théorique, et l'exposé des théories physiques aujourd'hui à l'étude. En outre, en tant que mathématicien, il met souvent l'accent sur les a priori rencontrés dans les mathématiques pour la physique que Roger Penrose développe de façon considérable ; ceci semble une forme de contradiction, mais en l'état actuel, travailler en dehors des $\mathbb{R}$-objets n'est pas encore classique et c'est bien le problème en termes de propositions.

8) Roger Penrose

D'après le livre de Penrose : La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique
Nous allons terminer ce chapitre par quelques trop peu nombreux extraits de [Pen].

a) [Pen], § 4.3

La nature ne montre aucun indice direct du fait qu'il existe une notion de « distance » jusqu'à des échelles arbitrairement grandes ; et encore moins qu'une telle notion peut être appliquée à l'infiniment petit.

En effet, rien n'indique qu'il existe « des points dans l'espace » en accord avec une géométrie qui ferait usage de distances données par des nombres réels (...).

Commentaire 17 : **Cette idée d'inadéquation de la notion de « distance » (au sens topologique habituel) aux échelles extrêmes est tout à fait pertinente et nous pensons que des recherches dans cette direction sont fondamentales (voir §§ 26, 6) en ce qui concerne l'usage des topologies ultramétriques).**

En effet, l'idée même de métrique classique (qu'elle soit « déformée » ou non par des principes de géométrie relativiste par exemple) implique ipso facto la présence d'un « fond dans lequel vivrait la physique », ce qui représente un axiome probablement excessif. De fait la métrique usuelle (archimédienne) ne permet pas des principes antagonistes comme les quanta, ce que d'autres métriques plus « arithmétiques » et ou la notion d'ordre (au sens $\leq$) n'existe pas.

Par ailleurs l'idée que la notion de distance $d(x, y)$ (au sens mathématique) soit naturelle (avec ses propriétés bien connues,

comme $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$) est sans doute abusive, comme le suggère Roger Penrose, par le fait qu'elle suppose la préexistence d'un «espace» donnant un sens aux notations ponctuelles x, y.

En outre, même si un formalisme sous-jacent supposait l'émergence de fonctions d (comme d'aillers pour le temps t conjecturé inexistant en tant que variable réelle), il faudrait que d ait des propriétés plus générales faisant passer d'une forme «quasi-euclidienne» pour le cadre macroscopique à une forme susceptible d'analyser le cadre quantique non comme la restriction (manifestement stupide) de la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^3$. $\square$

Roger Penrose poursuit :

Par exemple, le grand physicien Erwin Schrödinger fut parmi les premiers à proposer que le passage à une certaine forme de discrétude spatiale fondamentale pourrait s'avérer nécessaire :

L'«échelle continue», aujourd'hui si familière aux mathématiciens, est une idée excessivement dispendieuse, une extrapolation considérable de ce qui nous est accessible.

Il relia cette proposition à certaines idées des Grecs anciens sur la discrétude de la nature. Einstein suggéra lui aussi, dans ses derniers écrits publiés, qu'une théorie discrète («algébrique») pourrait être le chemin à suivre pour la physique future :

On peut avancer de bonnes raisons en faveur du fait que la réalité ne peut pas être représentée comme un domaine continu (...). Les phénomènes quantiques (...) nous incitent à chercher une théorie purement algébrique décrivant la réalité. Mais personne ne sait comment trouver les bases d'une telle théorie (...).

J'ai moi-même essayé ce type de choses, et je suis arrivé à un modèle que j'ai appelé la théorie «des réseaux de spins», dans laquelle la nature discrète du spin quantique sert d'élément de construction fondamental, dans une approche «combinatoire» de la physique (...) pour aboutir à la «théorie des twisteurs» (...).[7]

Toutefois, si l'on en croit la théorie physique éprouvée et vérifiée d'aujourd'hui (et qui remonte à vingt-quatre siècles), les nombres réels appartiennent toujours aux ingrédients fondamentaux de notre compréhension du monde physique.

---

(7) Pour la théorie des réseaux de spins, voir [Pen], 32.6, ainsi que [Sm1].

b) [Pen], § 21.1

En fait, la théorie quantique nous impose une « réalité » qui (. . .) est si différente (. . .) de notre intuition classique ordinaire, que nous pourrions tout bonnement choisir d'abandonner complètement l'idée de « visualiser » quoi que ce soit au niveau quantique. Et, en effet, il se trouve que certains physiciens doutent de l'existence même d'une véritable « réalité » aux échelles quantiques et préfèrent plutôt ne se fier qu'au seul formalisme mathématique de la mécanique quantique pour obtenir des résultats (. . .).

c) [Pen], § 21.6

Si nous devons ne considérer qu'une seule chose comme « véritablement » réelle dans notre formalisme quantique, alors je pense que seule la fonction d'onde (ou le vecteur d'état) est susceptible de décrire la réalité quantique d'un système (. . .). Selon moi, nous devons nous poser la question de la « réalité » en mécanique quantique (. . .).

COMMENTAIRE 18 : **Cette partie, en raison des remarques précédentes, paraît plus surprenante. Ceci dit tous les physiciens s'accordent pour dire que ces outils (mettant en jeu des espaces de Hilbert complexes de dimensions infinies !) sont en adéquation totale avec l'expérience, et les mathématiciens sont un peu en porte-à-faux en critiquant l'usage intensif des nombres réels tout en contribuant au développement de ces outils. Mais on peut dire aussi qu'il ne faut pas identifier l'outil, susceptible de modéliser assez bien des règles (celles de la nature), avec le sujet lui-même.** □

d) [Pen], § 22.1

Le saut de l'état quantique vers l'un des états propres de (l'opérateur hermitien Q correspondant à une mesure) est le processus connu sous le nom d'« effondrement de la fonction d'onde » ou de « réduction du paquet d'onde » (à un seul état). C'est l'un des aspects les plus mystérieux de la théorie quantique (. . .). Je pense que la plupart des physiciens ne considèrent pas la réduction du paquet d'onde comme une action « réelle » du monde physique, mais comme un reflet du fait que nous ne devrions pas voir le vecteur d'état comme décrivant une « véritable » réalité physique au niveau quantique (. . .). Juste après la mesure, l'évolution de Schrödinger reprend le flambeau (jusqu'à ce que le système soit soumis à une nouvelle mesure, et ainsi de suite) (. . .).

Commentaire 19 : **Roger Penrose est à même de parler de ces questions liées aux mathématiques classiques, alors que les fondateurs de la physique moderne avaient bien pressenti ces problèmes majeurs. Le seul point qui (sauf erreur) n'est pas abordé dans [Pen] est l'utilisation de contextes non « archimédiens » (i.e., non issus des classiques mesures à valeurs dans $\mathbb{R}$), c'est-à-dire de contextes ultramétriques que nous aborderons largement dans ce texte, compte-tenu des remarques précédentes sur l'idée de « distances spatiales ».**

Enfin on voit prononcé le mot «mesure» (au sens expérimental) qui nous paraît très indéfini à la fois au plan philosophique et au plan des conséquences qui en sont déduites : «*juste après la mesure, l'évolution de Schrödinger reprend le flambeau (jusqu'à ce que le système soit soumis à une nouvelle mesure, et ainsi de suite)*». **Nous ne comprenons pas la différence de nature qu'il y aurait dans un acte a priori analogue au déroulement de la physique de l'Univers avec ou sans expérimentateurs. Une définition s'impose pour une notion qui nous plonge dans un abîme de perplexité.** $\square$

Chapitre II

Les différentes formes de réalité en mathématique et physique

1) Introduction – Objectifs

Nous évoquons maintenant le problème de l'« existence » de la « chose » envisagée, existence qui a le plus souvent été remplacée par un « consensus intellectuel » auquel on s'est malheureusement habitué, ou encore a été considérée comme une « notion première », comme celle de nombre entier naturel en mathématique ou celle d'espace ou de particule élémentaire en physique.

Autrement dit, la « chose » finit par s'imposer comme « unicité intellectuelle » manifeste, quel que soit le point de vue axiomatique de départ : par exemple un nombre rationnel, réel ou complexe en mathématique, le temps, l'énergie ou la longueur en physique (ou ce que les physiciens appellent « le fond » pour caractériser l'espace géométrique cartésien usuel dans lequel tous les objets physiques se mouveraient).

En mathématique classique, le point de vue axiomatique de départ apparaît aussi comme une « évidence intellectuelle » : c'est la logique conduisant à la manipulation d'objets ensemblistes, de fonctions et de relations.

En physique, l'« évidence intellectuelle » est la notion d'expérience, qui prévaut sur les « théories formelles » (l'expérience ayant conduit à la plupart des bases théoriques, parfois des plus improbables, comme l'utilisation des espaces de Hilbert complexes en mécanique quantique et des géométries nouvelles (voire non commutatives) pour la relativité).

Or la logique mathématique classique repose sur un choix axiomatique relatif (théorèmes d'incomplétude de Gödel permettant si besoin de grossir la liste des axiomes) et l'expérimentation physique n'a aujourd'hui aucun caractère absolu (problèmes de décohérence quantique, relations d'incertitude d'Eisenberg, notion même de mesure physique), ce qui pose a priori de sérieux problèmes pour les deux disciplines.

Ceci est clair en mathématique pour un contexte logique des plus généraux, mais non pour les mathématiques ensemblistes classiques utilisées par les physiciens à ce jour, et pour lesquelles une analyse de la réalité est possible et montre des particularités extravagantes (même pour les mathématiciens), bien problématiques pour la description d'un réalisme en physique. Nous y reviendrons au Chapitre III.

En effet, notre point de vue est bien plus simple et élémentaire en ce qui concerne l'aspect mathématique, car les exemples donnés dans les illustrations de logique sont très élaborés (informatique théorique, utilisation de fonctions non calculables, non effectivité de la résolution d'équations diophantiennes, etc.).

Le cas le plus élevé de niveau d'existence est celui qui utilise l'axiome du choix sur des ensembles infinis, et qui permet de dire que sur $\mathbb{R}$ (qui comme on le verra plus loin est déjà pathologique et physiquement inexistant pour nous) il existe un bon ordre (ordre pour lequel toute partie non vide de $\mathbb{R}$ possède un plus petit élément) ; or il est impossible de caractériser ce bon ordre en pratique et on voit bien qu'il y a une superposition de difficultés logiques (voir § 5) les propriétés du continuum $\mathbb{R}$, sur lequel l'axiome du choix devrait en plus agir).

De même, il est illusoire de trouver une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, bien qu'il en existe par l'axiome du choix (on verra qu'une telle base constitue un ensemble ayant, comme $\mathbb{R}$, la puissance du continu).

Or ces aspects logiques, souvent mis en avant, n'ont rien à voir avec l'usage classique des mathématiques en physique. Autrement dit, nous nous restreignons ici à un cadre constructif limité à celui de $\mathbb{R}$ (ou ses analogues p-adiques) et ses conséquences immédiates (appelés les $\mathbb{R}$-objets) car c'est actuellement le cadre le plus large de toute description ou modélisation physique, et nous voulons montrer que c'est déjà beaucoup trop.

Tout ceci débouche sur le « réalisme » (en physique et en mathématique), notion débattue depuis toujours et pour laquelle on trouvera d'innombrables textes généraux [1].

---

(1) Voir [De3], [De6], pour le réalisme en sciences et en mathématique ainsi que : http://www.universalis.fr/encyclopedie/realisme-mathematique/, par Hourya Benis-Sinaceur, et http://www.universalis.fr/encyclopedie/realisme-philosophie/, par Jean Largeault.

2) La situation aujourd'hui pour la physique

Un débat plus récent sur ces questions en direction de la physique fait l'objet d'un article de Jean-Paul Delahaye [De6] dans PLS qui commence par ces mots (voir également les plus récents commentaires de Max Tegmark dans LR ([T2]) qui fait suite à d'autres publications comme [T1]) :

Pour expliquer la déraisonnable efficacité des mathématiques, le physicien Max Tegmark suggère une méthode radicale : considérer que le monde physique est purement mathématique.

C'est donc bien cette confrontation, limitée à des considérations classiques, qui est en jeu, avec ses éventuels excès.[2] Ceci dit, on est obligé de trouver une explication à la remarquable efficacité des mathématiques classiques (espaces vectoriels, espaces de Hilbert de dimensions infinies, analyse spectrale, équations aux dérivées partielles, géométrie non commutative, etc.) que les physiciens utilisent avec une réussite considérable ; mais jusqu'à quel point ? Là est toute la question.

En particulier, la convergence technique entre l'exposé actuel de la physique théorique et les outils mathématiques (convergence parfois très radicale par « identification pure et simple » ou plus classique par « modèlisation des phénomènes physiques »), pose à notre avis le double problème suivant :

(i) celui du concept d' « existence des objets » dans les deux cas de figure, mathématique et physique ;

(ii) celui du hiatus qui apparait dans leur confrontation, pour des raisons de pure logique qui ne semblent pas inquiéter des physiciens considérant l'utilisation des objets mathématiques comme allant de soi dans des circonstances allant du microscopique (mécanique quantique), puis se développant de façon complexe (monde macroscopique familier), pour se globaliser dans l'histoire de l'Univers.

C'est ce que nous allons essayer de préciser en revenant aux sources, c'est-à-dire en particulier aux fondements des mathématiques ensemblistes classiques, car nous pensons que les phénomènes rencontrés au plan constructif sont universels en dépit de spécificités apparentes.

En ce qui concerne la physique, notre totale incompétence sera compensée par des références éclairantes en partie basées sur des livres facilement

---

(2) On pourra également consulter les articles suivants :
http://www.universalis.fr/encyclopedie/physique-physique-et-mathematique/, par Jean-Marc Lévy-Leblond et
http://www.universalis.fr/encyclopedie/physique-les-fondements-et-les-methodes/, par Roland Omnès.

accessibles comme celui de Roger Penrose [Pen], celui plus élémentaire de Valerio Scarani [Sc], celui plus élaboré de Franck Laloë [La], et enfin sur des extraits tirés de la revue « Pour La Science » (PLS), l'Encyclopædia Universalis (EU), et « La Recherche » (LR).

On peut recommander la lecture des exposés généraux et débats philosophiques suivants : [EZ] ou « Implications philosophiques de la science contemporaine » par Bernard d'Espagnat [Es1], ainsi que « physique – Les fondements et les méthodes » par Roland Omnès. [3] Voir également les très nombreux ouvrages, plus ou moins de vulgarisation, cités dans la bibliographie.

Mais notre but n'est pas de couvrir les nombreux aspects et controverses théoriques (voire philosophiques), ni l'histoire des deux pôles majeurs de la physique (mécanique quantique, relativité restreinte), car de toutes façons, les observations que l'on peut faire au plan de la confrontation physique / mathématique seraient identiques. A ce sujet on pourra se reporter au livre de Lee Smolin [Sm2], pour un tel historique critique.

3) Exemples d'utilisation des mathématiques en physique

A titre d'exemple sur l'utilisation sans nuance des mathématiques en physique, rappelons le point de départ historique constitué par la notion de vecteur d'état d'un système physique (voir plus en détails le Chapitre X ainsi que [La], § 0.A, pour les postulats fondant, entre autres, l'interprétation dite de Copenhague de la mécanique quantique) :

(i) *Paul Dirac* [4] *exprime quelques postulats, un peu à la manière des postulats d'Euclide (cf. § 1)). Parmi ces postulats, le plus important est probablement le principe de superposition. Selon ce principe, si un système physique peut se trouver dans deux états que Dirac note $|\phi>$ et $|\psi>$, alors l'ensemble d'états du système contient les combinaisons linéaires $\alpha\,.\,|\phi> +\beta\,.\,|\psi>$ où α et β sont deux nombres complexes quelconques.*

Commentaire 20 : **Autrement dit, l'ensemble des états possibles d'un système physique serait un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et de fait un espace de Hilbert complexe de dimension infinie. Or comme on le verra au § 5), $\mathbb{R}$ (donc $\mathbb{C}$ par conséquent) est un objet totalement pathologique, et pas seulement pour la physique.** □

(3) http://www.universalis.fr/encyclopedie/physique-les-fondements-et-les-methodes/
(4) http://www.universalis.fr/encyclopedie/paul-dirac/, par Richard J. Eden et Eduardo de Rafael.

Mais Franck Laloë et d'autres (comme [La], § 9.A) essaient de corriger cette fâcheuse impression en affirmant : « *Il semble difficile de ne pas admettre que le vecteur d'état est un objet uniquement mental* » . Ensuite, les calculs sont du même type et donnés par des intégrales :

(ii)*En termes de calculs, l'état d'une particule (ou d'un système quelconque), comme fonction du temps, s'écrit :*

$$|\psi(t)> = \int_{r\in\mathbb{R}^3} \Psi(r,t)\,.\,|\,r> dr,$$

dans une base notée $|\,r>$, $r \in \mathbb{R}^3$, *d'un espace de Hilbert* $\mathcal{E}_r$, *où* $\Psi(r,t)$ *est une fonction scalaire associée au système, que Schrödinger appelle fonction d'onde.*

Autre exemple, sur les grandes interactions de la physique, on peut lire le texte suivant de Maurice Jacob et Bernard Pire [5], également éloquant, où l'on rappelle que le groupe spécial unitaire de degré n, $SU(n)$, est le groupe des matrices unitaires à coefficients complexes de dimensions $n \times n$ et de déterminant 1 :

D'un point de vue mathématique, les théories quantiques des champs ont été formalisées dans le cadre de théories de jauge *à l'aide de groupes de symétrie locale prenant la forme de groupes de Lie complexes sous-tendant chacun les symétries de jauge modélisées. Ainsi :*

(i) l'électrodynamique quantique a permis de décrire l'électromagnétisme dans le cadre d'une théorie de jauge abélienne avec le groupe unitaire $U(1) = \{z \in \mathbb{C},\ \ |z| = 1\}$,

(ii) l'interaction faible a été décrite avec le groupe spécial unitaire $SU(2)$,

(iii) l'interaction électrofaible l'a été avec le groupe de jauge $SU(2)\times U(1)$,

(iv) la chromodynamique quantique (interaction forte) l'a été avec le groupe $SU(3)$,

(v) enfin, le modèle standard a été élaboré avec le groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Commentaire 21 : **Mais les outils mathématiques évoqués ci-dessus ont néammoins montré leur efficacité calculatoire dans les raisonnements, en conformité avec le plan expérimental, sans pour autant constituer une « réalité objective ». Citons ici un passage rapporté dans [EZ], Séance II :**

(5) http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires-caracteres-generaux/, et http://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-champs/, par Bernard Pire.

Michel Bitbol *: Selon Carlo Rovelli, en effet, l'état quantique n'est pas une caractéristique propre des systèmes physiques mais une caractéristique relationnelle qui dépend de la position qu'occupe l'observateur dans le processus de connaissance (...). Olivier Rey signalait que les paradoxes de la théorie quantique disparaissent si l'on admet qu'elle n'est pas une «science du monde tel qu'il est, mais de la façon dont nous interagissons avec lui».*
(...)
Pourquoi une théorie qui, comme on l'admet maintenant, ne représente pas une réalité complètement extérieure à nous, complètement indépendante de ce que nous faisons en elle, est néanmoins si efficace. Pourquoi cette efficacité ? Le fameux argument des réalistes scientifiques dit que si la théorie ne représentait pas le monde, on ne comprendrait pas pourquoi elle marche tellement bien.
(...)
Bernard d'Espagnat *: Je considère (...) comme vous que la physique n'est pas capable de décrire la réalité en soi. Je suis même tenté de considérer la physique quantique comme étant une théorie essentiellement opérationnaliste, autrement dit ramenant tout, directement ou indirectement, à la notion de prévision de résultats d'exp:'eriences, ce qui implique évidemment qu'elle se rapporte toujours à nous, à ce que nous verrons ou à ce que nous ressentirons (...).*

Autrement dit, on doit pouvoir considérer ces $\mathbb{R}$-espaces, leurs opérateurs, et les cadres géométriques correspondants (microscopiques, macroscopiques, ou arbitrairement grands), comme des cadres-limites qui émergent de fondements plus subtils, et ceci constitue une obligation logique (non évidente) de définir des fondements menant nécessairement à cett forme finale un peu comme la complétion de $\mathbb{Q}$ mène à $\mathbb{R}$. [6] □

Or ces fondements restent actuellement étrangers à une modélisation mathématique susceptible d'éviter nombre d'absurdités.

Donnons ci-après l'exemple saisissant portant sur la notion de spin d'une particule vu dans le cadre classique des $\mathbb{R}$-objets [7] (voir aussi [De5]).

En mécanique classique, le moment angulaire d'une particule possède non seulement une magnitude (vitesse de rotation de la particule), mais également une direction (direction de l'axe de rotation de la particule).

---

(6) Pour la notion d'émergence des lois de la nature voir : http://www.larecherche.fr/parution/mensuel-407

(7) http://www.universalis.fr/encyclopedie/spin/, par Jean-Marc Lévy-Leblond.

En mécanique quantique, le moment angulaire de spin (ou spin) contient également ces informations, mais dans une forme plus subtile.

La mécanique quantique montre en effet que si l'état du moment angulaire de spin est l'un des états propres, la composante du spin mesurée selon une direction quelconque, c'est-à-dire sa projection sur un axe quelconque (par exemple l'axe Oz), ne peut prendre que des valeurs quantifiées dépendant du nombre quantique de spin s de la particule.

On peut constater qu'il existe $2s + 1$ valeurs quantiques possibles. Le nombre $2s + 1$ est appelé la multiplicité de spin. Par exemple, il n'y a que deux valeurs possibles pour une particule de spin $1/2$, à savoir $+1/2$ ou $-1/2$. Cela correspond à deux états quantiques pour lesquels la projection du spin pointe respectivement dans la direction $+Oz$ ou $-Oz$.

La valeur de la projection dans les autres directions de l'espace, Ox ou Oy par exemple, est par contre indéterminée, du fait des relations de non-commutation (ou d'« incertitude ») entre les trois composantes du spin.

En d'autres termes, si l'on ne s'intéresse qu'à un spin individuel, il n'est pas possible de déterminer avec précision sa direction dans l'espace (c'est en quelque sorte l'équivalent du principe d'incertitude de Heisenberg en ce qui concerne vitesse et la position d'une particule qui ne peuvent pas être déterminées simultanément).

COMMENTAIRE 22 : **Faisons quelques commentaires sur ce texte qui renonce à toute précaution sur les fondements mathématiques utilisés et prenant le parti de l'existence (de plus en plus contestée) d'un « fond géométrique » assimilable à $\mathbb{R}^3$:**

(i) La phrase : « *La composante du spin mesurée selon une direction quelconque, c'est-à-dire sa projection sur un axe quelconque (par exemple l'axe Oz), ne peut prendre que des valeurs quantifiées* » **, mélange une situation de $\mathbb{R}$-espace vectoriel (par le biais des axes usuels de $\mathbb{R}^3$) avec le domaine dont l'ordre de grandeur est celui de la constante de Planck, domaine pour lequel des mathématiques discrètes (ou d'une autre nature topologique) sont seules susceptibles de décrire de tels phénomènes ; le point de vue «continuum» est tout à fait contestable car on peut affirmer (ce qui sera précisé dans les chapitres suivants) que le domaine quantique n'est pas la réduction par zoomage suffisant de l'espace infini $\mathbb{R}^3$ qui n'est probablement qu'une version approchée de la réalité macroscopique.**

L'espace quantique peut-il se décrire au moyen d'objets munis de lois algébriques et de topologies convenables (groupes, corps finis, réseaux, ... , associés à des métriques « ultramétriques » ou autres) ? Mystère.

Dans le Chapitre IX, nous donnerons un exemple théorique de construction d'un objet (le compactifié p-adique de $\mathbb{R}$, cf. § 6)) associant deux topologies (l'une classique archimédienne, l'autre étant ultramétrique). Au § 5) nous montrerons l'existence de topologies « exotiques » auquelles on ne pense pas forcément car, sauf erreur, elles n'ont pas été utilisées.

(ii) Ensuite la description : « *Cela correspond à deux états quantiques pour lesquels la projection du spin pointe respectivement dans la direction $+Oz$ ou $-Oz$. La valeur de la projection dans les autres directions de l'espace, Ox ou Oy par exemple, est par contre indéterminée (...)* » **ajoute, au commentaire précédent, les questions d'incertitude, d'indétermination qui seront discutées ultérieurement mais qui apparaîssent comme des pis-allers.**

(iii) En ce qui concerne la remarque : « *En d'autres termes, si l'on ne s'intéresse qu'à un spin individuel, il n'est pas possible de déterminer avec précision sa direction dans l'espace* » **, elle a un caractère d'évidence si l'on croit l'espace quantique plongé dans $\mathbb{R}^3$. Il apparaît déjà que si l'espace $\mathbb{R}^3$ a un sens approché pour le cadre macroscopique de la physique, le cadre microscopique ultime ne saurait être la restriction de la géométrie de $\mathbb{R}^3$ et que s'il existe un autre substrat mathématisable, il doit rendre compte du cas quantique et se développer en un substrat donnant l'illusion de $\mathbb{R}^3$ à plus grande échelle et non le contraire.**

Autrement dit on peut parler du « syndrome euclidien de la boîte à chaussures » qui consiste à faire comme si tout se passait dans un pré-univers du genre $\mathbb{R}^n$ ($n = 3$ ou 4 ou plus), c'est-à-dire que tous les objets physiques seraient des sous-objets mathématiques vivant dans ce pré-univers appelé « le fond » par les physiciens. Voir dans [Pen] des tentatives de suppression de cette difficulté. □

Nous reviendrons sur cet aspect fondamental et nous aurons l'occasion de commenter bien d'autres exemples malheureusement analogues (dimensions cachées, théories des boucles, des cordes, etc.), après être revenus sur les fondements des mathématiques ensemblistes pour éclairer ces contradictions.

Chapitre III

Notion d'objet réel en mathématique

Les constructions explicites d'objets (sur des bases logiques préétablies) sont apparues dès l'élaboration des mathématiques ensemblistes au 19-ème et 20-ème siècles, avec Cantor [1], Hilbert [2] (qui a pu parler de « paradis » créé par Cantor pour les mathématiciens), puis formalisées par Bourbaki et bien d'autres, à partir d'un système d'axiomes dit de Zermelo–Fraenkel–Skolem–Von Neumann . . . , pour donner cette théorie dont nous admettons les bases, et dont l'utilisation reste très pragmatique (notamment dans le cadre qui nous occupe et qui concerne les mathématiques pour les scientifiques, ingénieurs, philosophes, grand public, . . .).

1) Méthodologie ensembliste Constructions d'objets.

Presque toujours, et notament dans l'enseignement, les objets les plus simples ne sont pas, à proprement parler, construits, mais suggérés (ce que nous appelerons plus loin l'« unicité intellectuelle » de l'objet, ses « constructions » n'étant jamais uniques), ce qui suffit pour la pratique, mais prive d'une démarche essentielle de clarification.

a) Etat de la question–Un exemple de pratique courante

Citons par exemple la définition grand public que donne Wikipédia des «fractions rationnelles», au moyen de quelques extraits : [3]

En mathématiques, une fraction est un certain nombre de parts considérés (sic) *après la division d'un nombre entier en parts égales. Par*

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/georg-cantor/, par Jean-Luc Verley.

(2) http://www.universalis.fr/encyclopedie/david-hilbert/, par Rüdiger Inhetveen, Jean-Michel Kantor, et Christian Thiel.

(3) http://fr.wikipedia.org/wiki/Fraction (liens : « Fraction, objet mathématique » et « Corps des fractions en théorie des anneaux »), au 29 août 2014, 18:39 UTC.

exemple, la fraction $\frac{56}{8}$ *désigne le quotient de* 56 *par* 8. *Elle est égale à* 7 *car* $7 \times 8 = 56$. *Dans cette fraction,* 56 *est appelé le numérateur et* 8 *le dénominateur.*

Les nombres que l'on peut représenter par des fractions de nombres entiers sont appelés nombres rationnels. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Une fraction est une division non effectuée entre deux nombres entiers relatifs n *et* $d \neq 0$.

Une autre démarche est de nature purement algébrique. Les nombres rationnels sont construits de manière abstraite à partir de classes d'équivalence d'entiers. L'addition et la multiplication issues des nombres entiers sont compatibles avec la classe d'équivalence, ce qui équipe l'ensemble des fractions d'une addition et d'une multiplication naturelles. Cette construction permet d'établir les lois régissant le comportement des fractions.

COMMENTAIRE 23 : **Difficile de faire pire dans la mesure où la première partie commence par un exemple numérique qui n'est pas pertinent car c'est un cas de divisibilité au sens de l'arithmétique (propriété de $\mathbb{Z}$, donc en amont logiquement, même si ce cas particulier doit être évoqué, bien que plus subtil qu'il ne paraît car il suppose de retrouver $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$).**

Ensuite, « *Les nombres que l'on peut représenter par des fractions de nombres entiers sont appelés nombres rationnels* » **semble indiquer que l'on suppose l'idée de nombre réel acquise, les nombres rationnels en étant des cas particuliers, alors qu'il faut avoir construit $\mathbb{Q}$ pour avoir $\mathbb{R}$.**

La définition de « *division non effectuée* » **contredit le début** « *après la division d'un nombre entier en parts égales* » **, parts dont on ignore la nature.**

Le dernier paragraphe est plus correct à ceci près que l'on parle « *d'autre démarche* » **qui serait d'une autre nature dite** « *algébrique*, **et le pire est sans doute ici :** « *Les nombres rationnels sont construits de manière abstraite (...)* » **, alors que c'est plutôt le contraire de notre point de vue, et ce serait quoi la construction non abstraite ?**

Le lien «**Corps des fractions en théorie des anneaux**» **de Wikipédia est alors plus conforme, mais assez brut et on lit par exemple :** « *l'application* i *de* A *dans* $K(A)$ *qui, à l'élément* a, *associe* $\frac{a}{1}$ *est un morphisme injectif qui plonge* (sic) *l'anneau* A *dans son corps*

de fractions ». Evidemment il n'est pas question de « transport de structure » (cf. Chapitre VIII) qui a au moins l'avantage de mettre le doigt sur certaines difficultés majeures sur l'aspect constructif.

Rappelons que toute « identification » ou tout « plongement » est purement du domaine de l'existence intellectuelle (suffisant en pratique), mais non de celui d'une construction.

Ce Commentaire n'est pas (en dépit des apparences) une critique d'un contenu de type « dictionnaire », mais est destiné à attirer l'attention sur les dangers de telles réductions auquelles on s'habitue, et nous allons insister ci-dessous sur les problèmes quasi philosophiques qui se posent, déjà pour les mathématiques, ce qui peut contribuer à une réflexion scientifique plus large dans la mesure ou ce que nous proposons n'est pas du formalisme gratuit mais une dénonciation de ce qu'il faut bien appeler de la « mauvaise cuisine » soi-disant pédagogique. □

b) Principes généraux

Sur ces questions de constructions, la règle du jeu est de n'utiliser que ce qui a été construit précedemment, sans introduire d'artifices, et en n'utilisant que les principes logiques usuels, essentiellement la notion de relation entre les éléments d'un ensemble (relation d'équivalence, d'ordre), application d'un ensemble dans un autre, car ce ne sont pas des « objets » mais des définitions.

Rappelons à titre d'exemple le cas des relations d'équivalence et des relations d'ordre :

(i) Une relation d'équivalence sur un ensemble $E \neq \emptyset$, est une relation $\sim$ entre les éléments de E qui doit vérifier les propriétés $x \sim x$ (réflexivité), $x \sim y$ est équivalent à $y \sim x$ (symétrie), et les relations $x \sim y$ et $y \sim z$ impliquent $x \sim z$ (transitivité), pour tous $x, y, z \in E$.

Pour $x \in E$ fixé, l'ensemble des éléments de E équivalents à x s'appelle la classe de x ; l'ensemble des classes pour $\sim$ forme une partition de E qui fonde un nouvel ensemble $\mathcal{E}_\sim$ contenu dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.

La relation d'égalité (très forte) est la plus simple des relations d'équivalence.

(ii) Une relation d'ordre sur un ensemble E est une relation $\leq$ entre les éléments de E vérifiant les propriétés suivantes : $x \leq x$ (réflexivité), les relations $x \leq y$ et $y \leq x$ impliquent $x = y$ (antisymétrie), et les relations $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$ (transitivité), pour tous $x, y, z \in E$.

La relation d'ordre est dite totale si l'on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tous $x, y \in E$ (comparabilité de toute paire d'éléments).

En ce qui concerne les ensembles, on n'utilise que des banalités (produit cartésien d'ensembles, manipulation des parties d'un ensemble).

Par exemple, pour revenir à l'idée de construction, on pourrait se contenter de définir les nombres négatifs en mettant un signe $-$ devant les nombres positifs (-1, -2, ...) et en établissant les règles de calculs sur ces notations, mais ceci serait une manipulation scripturale extérieure au corpus mathématique existant (ensembles et relations) et non une preuve d'existence de -1, -2, ... (de la cuisine en quelque sorte !). Ceci sera explicité au § 2).

c) Approche réaliste de la théorie des ensembles

Si l'on admet que la théorie des ensembles usuelle est le vocabulaire de base pour le développement de la pensée mathématique, elle commence par résoudre le problème de l'« existence » des objets mathématiques (c'est quoi le nombre 0, le réel π ?).

Nous entendrons alors par « objet réel » ou objet, ce qui résulte d'une telle construction explicite (dans le système logique et axiomatique évoqué plus haut), situation qui a un sens en mathématique, mais qui est caractérisée par les deux aspects suivants :

(i) La non unicité « matérielle », résultant soit d'une chronologie variable des constructions antérieures, soit tout simplement du choix de la méthode ;

(ii) l'unicité «intellectuelle», qui a pour conséquence que le fait de savoir que cette construction (en général très compliquée) est «possible» suffit aux mathématiciens qui éludent alors cet aspect construction, dans la mesure où cela «ne peut changer aucun théorème», à condition toutefois d'établir une fois pour toutes des propiétés d'isomorphie entre les objets obtenus par différentes voies (cas des constructions historiques très différentes de $\mathbb{R}$ par exemple).

Le problème vu au niveau de la physique n'est pas très différent puisque les résultats (nombreux) ne dépendent pas a priori de l'idée que l'on peut avoir de l'Univers en tant que tel, mais dépendent des relations (les lois supposées de la physique) qui existent entre les « briques élémentaires » (probablement les particules élémentaires ou des entités plus « fines » non encore exhibées comme les préons, les champs ou les interactions), l'ensemble de ces briques élémentaires et un certain nombre de postulats de base pouvant être encore en cours de recensement (mécanique quantique, origine et structure de l'Univers...).

Ceci peut expliquer que l'on calque le modèle physique sur le modèle mathématique avec une connaissance artificielle des particularités de ce dernier.

d) Objets et notions mathématiques

L'aspect constructif est souvent considéré comme secondaire par rapport à celui des « notions mathématiques » qui, elles, sont porteuses de progrès et sont inventées par le mathématicien qui doit les définir dans le cadre du language ensembliste et en établir les propriétés.

En ce qui concerne les notions (celle de groupe par exemple), elles sont uniques en tant que définitions, contrairement aux objets associés (les groupes) ; par exemple un groupe trivial (à un unique élément) est réalisé d'une infinité de façons comme par exemple $\{0\}$ muni de l'addition, $\{1\}$ muni de la multiplication, ou encore l'identité id pour les transformations géométriques munies de la composition $\circ$ des transformations.

On parle alors de groupes isomorphes et il est clair que ceci suffit en mathématique pour établir les propriétés algébriques des éléments de toute « classe » de groupes isomorphes, l'isomorphie pouvant être considérée comme une relation d'équivalence entre (ici) les groupes.

Mais si l'on munit les groupes de structures topologiques, il faut que la notion d'isomorphisme s'adapte à ce nouveau cadre ; par exemple le groupe additif $\mathbb{Q}$ peut être muni de la topologie métrique usuelle (provenant de la distance ou valeur absolue usuelle) ou (pour p premier) de la topologie p-adique (pour laquelle la distance entre x et y est donnée par

$$d_p(x, y) := p^{-\mathrm{val}_p(y-x)},$$

où $\mathrm{val}_p(z)$ est l'exposant (positif ou négatif) de p dans la décomposition en facteurs premiers de z). [4]

Ce sont deux objets différents, mais il est clair que du point de vue ensembliste, l'objet sous-jacent est le même.

(4) http://www.universalis.fr/encyclopedie/espaces-metriques/, par Jean-Luc Verley ; http://www.universalis.fr/encyclopedie/nombres-theorie-des-nombres-p-adiques, par Christian Houzel.

e) Ensembles et topologies

Ceci, comme les structures algébriques, reste bien dans le cadre expliqué au début de ce Chapitre ; en effet, une topologie est la donnée d'une famille de parties de l'ensemble (les ouverts) devant vérifier certaines conditions (pour plus de détails, voir le Chapitre IX).

Par exemple un ensemble E est muni de la topologie discrète si la famille des ouverts est l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ; comme on l'a déjà dit, ce terme peut engendrer des confusions avec la notion de cardinalité. En effet, pour $\mathbb{R}$ on parle de « continuum » au plan ensembliste, mais rien n'interdit de le munir de la topologie discrète : ceci ne change que la notion de « fonction continue » de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (toutes les applications ensemblistes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont continues !), par contre, muni de sa topologie usuelle (les ouverts sont les réunions finies ou non d'intervalles $]a, b[$, $a \leq b$ réels quelconques) on obtient le cadre classique.

Enfin, sur $\mathbb{Z}$ qui est discret pour la topologie usuelle, on pourra mettre la topologie p-adique (p premier) pour laquelle les ouverts sont les réunions quelconques d'ensembles de la forme $a + p^n\,\mathbb{Z}$, pour $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$; alors pour cette topologie, deux entiers a et b sont d'autant plus proches que $b - a$ est divisible par une grande puissance de p (la suite des p^n tendant par définition vers 0 !).

Les topologies les plus usuelles résultent de l'existence d'une distance d sur E (à valeurs dans l'ensemble des réels ≥ 0, ce qui suppose que $\mathbb{R}$ a été constuit, sauf si elle est à valeurs dans $\mathbb{Q}_+$, ce qui est le cas des métriques p-adiques sur $\mathbb{Q}$) pour laquelle les ouverts sont les parties de la forme $\{x \in E,\ \ d(x, a) < h\}$, $a \in E$, $h > 0$ réel quelconque (voir au § 31 un rappel sur la topologie p-adique).

f) Unicité vs non unicité des objets

Comme on l'a évoqué, il n'y a pas unicité de la construction d'objets réels, mais il y a par exemple une unicité intellectuelle manifeste pour le nombre 0, ou cardinal de $\emptyset$ (voir le § 5)), et qui ne date pas d'aujourd'hui. De même pour le nombre π défini géométriquement comme rapport « circonférence/diamètre » pour un cercle quelconque ; mais la géométrie élémentaire n'est constitutive de la théorie des ensembles que bien après les constructions de $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$.

C'est d'ailleurs pour cette raison de non-unicité que l'on a historiquement remplacé de telles constructions par des notions premières affaiblissant ainsi le propos. Autrement dit, on a inventé le nombre 0 avant de le construire de façon correcte, et de même pour les autres entiers naturels. Quant à π on connaît de nombreuses définitions équivalentes (limites de suites ou séries par exemple). Plus généralement, on verra que la construction des nombres réels est loin d'être unique.

On peut penser que certains termes de la physique sont aussi des notions premières, non mathématiques, mais traitées de façon mathématique, et qu'il conviendrait de construire de façon absolue. Au niveau construction « axiomatique », on aurait donc non unicité (mais une gestion mathématique possible) et unicité intellectuelle qui pourrait correspondre à la notion de perception de la réalité.

Reste pour nous à trouver la situation « minimale » à partir de laquelle tout sera construit. C'est l'objet du § 2) suivant en ce qui concerne les seules mathématiques.

2) Les nombres entiers fondent les mathématiques

[5] Cette assertion, essentielle, peut se voir en montrant la progression des constructions à partir des nombres entiers (supposés construits) qui définissent l'ensemble $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ dit des cardinaux finis (voir § 2) le point délicat sur l'existence des cardinaux, chronologiquement antérieure à toute construction).

a) Construction de $\mathbb{Z}$

Sans justifications trop précises, disons simplement que $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs, se construit par symétrisation, au moyen de la relation d'équivalence, dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, définie par $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $b + a' = b' + a$. Par exemple -1 est alors « la classe »

$$-1 = \{(0, 1), (1, 2), \ldots, (n, n+1), \ldots\}.$$

On retrouve les nombres positifs comme des classes particulières, par exemple,

$$\text{« } 0 \text{ »} = \{(0, 0), (1, 1), \ldots, (n, n), \ldots\}$$

et

$$\text{« } 1 \text{ »} = \{(1, 0), (2, 1), \ldots, (n+1, n), \ldots\} \ ;$$

[(5)] Pythagore et ses disciples pensaient que le secret du monde tenait en quelques mots : *Toute chose est nombre.*

on notera que l'on a perdu l'inclusion habituelle $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ dans cette construction, et ceci est un phénomène général.

On peut faire en sorte que l'on ait l'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, inclusion qui n'est pas vraie stricto sensu dans la construction ci-dessus puisque 1 par exemple est distinct (comme objet ensembliste) de l'ensemble infini $\{(0,1),(1,2),\ldots,(n,n+1),\ldots\}$, et toute « identification », comme pratiquée dans bien des manuels, est tout simplement un tour de passe-passe sans fondement logique et même contradictoire au niveau des écritures.

On construit $\mathbb{Z}$ de telle manière que l'on ait $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ par le principe non totalement évident de *transport de structure* qui exige une complication ensembliste, mais qui montre les difficultés rien qu'au niveau mathématique pour faire exister concrètement les objets usuels. Enfin on étend à $\mathbb{Z}$ l'addition sur $\mathbb{N}$ de la façon bien connue. Voir le Chapitre VIII pour un complément sur le transport de structure et sur l'absurdité totale du principe d'identification courament utilisé.

Mais on peut définir les entiers relatifs de bien d'autres manières pour éviter que chaque $-n$ soit un ensemble infini. Il suffit par exemple de considérer l'ensemble des couples $(1,n)$ et $(0,n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, muni de la relation d'équivalence pour laquelle les classes distinctes sont les ensembles $\{(0,n)\}$, $n > 0$ (qui figurent les éléments non nuls de $\mathbb{N}$), les $\{(1,n)\}$, $n > 0$ (qui figurent les éléments non nuls de $-\mathbb{N}$), et la classe $\{(0,0),(1,0)\}$ (qui figure 0 dans ce nouvel ensemble $\mathbb{Z}'$).

On procède comme ci-dessus, pour avoir $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, en « recollant »

$$\mathbb{Z}' \setminus \big\{\{(1,1)\},\{(1,2)\},\ldots,\{(1,n)\},\ldots\big\}$$

avec $\mathbb{N} = \{0,1,\ldots,n,\ldots\}$. Cette construction est une version correcte de l'écriture consistant à « mettre un signe $-$ devant les éléments de $\mathbb{N}$ ».

b) Construction de $\mathbb{Q}$

Ensuite, l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ modulo la relation d'équivalence :

$$(a,b) \sim (a',b') \text{ si et seulement si } ab' - a'b = 0 \ (a,a',b,b' \in \mathbb{Z},\ b,b' \neq 0).$$

On note la classe de (a,b) par $\frac{a}{b}$.

Par exemple, la classe $\frac{1}{3}$ est donc égale à :

$$\{\ldots;(-n,-3n);\ldots;(-2,-6);(-1,-3);(1,3);(2,6);\ldots;(n,3n);\ldots\}.$$

L'addition et la multiplication sont alors définies comme à l'école primaire, sauf que l'on doit vérifier que l'écriture $\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'} := \frac{ab'+ba'}{bb'}$, entre classes, ne dépend pas du choix des représentants.

On perd alors $\mathbb{Z}$ qui est remplacé par les fractions entières $\frac{a}{1}$, $a \in \mathbb{Z}$. On fait évidemment de même un transport de structures pour disposer de l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, et on a la réunion disjointe $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}'$ où $\mathbb{Q}'$ est l'ensemble des fractions $\frac{a}{b}$ (au sens ci-dessus) non entières. On étend les lois $+$ et $\times$ de façon adéquate, ce qui fait d'une fraction un objet très complexe, ce qu'on oublie dans la mesure où l'on est convaincu de son existence intellectuelle simplifiée. Enfin on munit $\mathbb{Q}$ de sa relation d'ordre évidente.

On peut vérifier que le calcul $2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$ est alors d'écriture incorrecte car $\frac{1}{1} \notin \mathbb{Q}$ pour cette construction de $\mathbb{Q}$, et qu'il faut écrire $2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Abordons maintenant un cas nettement plus intéressant, car issu d'une approche assez «physique» de la notion de limite, notion intuitive souvent posée : que se passe-t-il losqu'on cherche à descendre en-dessous de la constante de Planck, à se rapprocher du Big Bang, etc. En mathématique elle mène à la construction des nombres réels. En physique, on ne sait pas trop !

c) Suites de Cauchy de rationnels : de la physique expérimentale

Comme $\mathbb{R}$ (ou la droite réelle) n'existe pas encore, on doit faire de l'analyse classique dans $\mathbb{Q}$ en introduisant sur $\mathbb{Q}$ la « topologie » définie par la distance usuelle $d_\infty(x,y) := |y-x|$ pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$.

Représentation décimale d'un rationnel. Considérons la représentation décimale d'un rationnel $\frac{a}{b}$ qui consiste à utiliser les puissances $\frac{1}{10^i}$ de l'inverse de la base usuelle pour représenter les nombres rationnels positifs $x < 1$ (tout rationnel positif étant la somme d'un entier et d'un tel x). L'algorithme correspondant n'a plus rien à voir avec la division euclidienne, mais avec ce qu'on appelle la « division selon les puissances croissantes » de $\frac{1}{10}$, ou plus justement un développement « ∞-adique » , au sens de la métrique archimédienne usuelle, par analogie avec les « métriques p-adiques ». Une première difficulté est que les développements ne sont pas nécessairement finis :

$$\frac{1}{3} = 0,3333333\cdots, \text{ noté } \sum_{i\geq 1} \frac{3}{10^i} \text{ dans la base usuelle.}$$

Commentaire 24 : **On peut se demander pourquoi on ne se contente pas de la seule notion classique de suite convergente vers une limite ; en effet, dans le cas de la représentation décimale de $x = \frac{a}{b} < 1$, on peut écrire** *symboliquement* **:**

$$x = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{10^i} \Big), \ e_i \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

C'est la notion de limite de suite (de rationnels) et on peut dire par exemple que $x_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{10^i}$ [6] tend vers la « limite » $\ell := x = \frac{a}{b}$ lorsque n tend vers l'infini, car manifestement la différence entre x_n et $\frac{a}{b}$ est de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{10^n}$ qui tend vers 0.
Mais dans ce cas, on a par définition l'existence d'une limite $\ell \in \mathbb{Q}$ pour ensuite vérifier que $x_n - \ell$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Mais on va voir que ℓ n'existe pas toujours, même si la suite des x_n « donne l'impression de converger »; or les suites donnant l'impression de converger, en un sens qui doit intéresser la physique, sont les suites de Cauchy et il n'y a pas d'alternative car de façon évidente, toute suite convergente vers une limite est une suite de Cauchy ; d'ou l'intérêt de la réciproque. □

Définition des suites de Cauchy. Une suite de Cauchy de rationnels $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ indexée par $\mathbb{N}$, est par définition telle que :

$$x_m - x_n \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ et } m \text{ tendent vers l'infini}$$

de façon indépendante, ce qui est équivalent à l'écriture

$$d_\infty(x_m, x_n) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } n \text{ et } m \text{ tendent vers l'infini}$$

de façon indépendante.
En effet, on peut penser que ce « rapprochement » aussi fin que l'on veut donne une idée intuitive que la suite a une limite $\ell \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire telle que $d_\infty(x_k, \ell)$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Or ceci est totalement faux comme le montre toute suite de la forme suivante (où l'on se ramène pour simplifier à des nombres positifs strictement plus petits que 1) :

$$x_n = \frac{e_1}{10} + \frac{e_2}{10^2} + \cdots + \frac{e_n}{10^n}, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

où les $e_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ sont choisis de telle sorte que la suite de chiffres $(e_1, \dots, e_i, \dots)$ ne présente aucune périodicité à partir d'un certain rang.

---
(6) On rappelle qu'une somme vide est par définition égale à 0, ce qui fait que $x_0 = 0$.

En effet le développement décimal de tout rationnel $\ell = \frac{a}{b}$ est périodique à partir d'un certain indice ; c'est une simple propriété d'arithmétique élémentaire sur les entiers a et b qui n'a rien à voir avec l'analyse, et que nous rappelons :

Périodicité des développements rationnels. On se ramène d'abord à une fraction dont le dénominateur est étranger à 10 en multipliant numérateur et dénominateur par une puissance de 2 et/ou une puissance de 5 convenables pour avoir un dénominateur de la forme $10^r.b'$, $r \geq 0$, b' étranger à 10 (par exemple $\frac{123}{35}$ devient $\frac{246}{70} = \frac{1}{10}.\frac{246}{7}$ et on étudie le développement de $\frac{246}{7}$, et $\frac{123}{28}$ devient $\frac{123 \cdot 25}{200} = \frac{1}{100}.\frac{3075}{2}$).
On considère alors la fraction $\ell' = \frac{a}{b'}$ dont le développement décimal redonne celui de ℓ quitte à déplacer la virgule.
Par exemple $\frac{1}{140} = \frac{5}{700}$ conduit au développement de

$$\tfrac{5}{7} = 0.714285\,714285\,714285\,714285\ \cdots,$$

celui de $\frac{1}{140}$ étant $0.00\,714285\,714285\,714285\,714285\ \cdots$.
Ensuite on utilise la plus petite puissance 10^k de 10 telle que $10^k - 1$ soit divisible par b' (qui existe puisque b' est étranger à 10) puis on écrit convenablement le développement en explicitant celui de $\frac{1}{10^k-1}$ qui est de la forme $1.000 \cdots 0001000 \cdots 0001000 \cdots 0001000 \cdots$, où chaque période contient $k-1$ zéros. D'où la période du nombre de départ en multipliant par $\frac{10^k-1}{b'}$. On peut aussi constater la périodicité en faisant la division « à la main » car le nombre de restes possibles est fini et dès que l'un d'eux se retrouve on obtient la période.
Par exemple, on a le développement périodique

$$\tfrac{1}{7} = \tfrac{142857}{10^6-1} = 0.142857\,142857\,142857\,142857\ \cdots).$$

mais la période relative à $\frac{1}{729}$ est :

137174211248285322359396433470507544581618655692729766803840877914951989026063 1.

Or, en prenant garde au fait que $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit et donc que la série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{10^k}$ n'a pas encore de sens en général, on vérifie facilement que si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendait vers un rationnel ℓ, alors les développements finis $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e_k}{10^k}$ pour n croissant seraient incompatibles avec ceux du rationnel ℓ (pour n assez grand par rapport à la période correspondante).
Par exemple, la suite de Cauchy définie par :
$x_0 = 0$, $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,12$, $x_3 = 0,123$, $\ldots$, $x_{10} = 0,123456789\,10$, $\ldots$
$x_{100} = 0,123456789\,10\,11\,12\,13\ \ldots\ 99\,100$, $\ldots$
ne possède pas de limite rationnelle.

Que faire des «séries de rationnels» $\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{10^k}$. Remarquons que si ℓ est un rationnel positif, $\ell < 1$, alors son développement décimal usuel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{10^k}$, $e_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, a un sens comme série, laquelle est par définition la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite de rationnels $\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{10^k}$ puisque la différence de rationnels $\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{10^k} - \ell$ tend vers 0 par construction.

Pour une suite de rationnels $\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{10^k}$, où les $e_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ sont quelconques, on veut justement faire exister un « réel » afin que le même processus de développement décimal ait un sens ; autrement dit il faut d'abord assurer l'existence d'un « nouveau » nombre $\ell \notin \mathbb{Q}$ qui sera la limite de la suite précédente.

Propriétés des suites de Cauchy. Revenons à une suite de Cauchy de rationnels $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Pour les questions de limites on fait usage de nombres $\varepsilon > 0$ arbitrairement petits, mais ici on doit les prendre dans $\mathbb{Q}$ puisque $\mathbb{R}$ n'existe pas, mais ce n'est pas gênant, car on peut prendre par exemple $\varepsilon = \frac{1}{10^N}$, pour N aussi grand que l'on veut.

Par définition, pour $\varepsilon_0 := \frac{1}{10^{N_0}}$, il existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq M_0$, on a $d_\infty(x_m, x_n) \leq \frac{1}{10^{N_0}}$; autrement dit, tous les termes de la suite d'indices au-delà de M_0 sont dans le petit intervalle

$$\left[x_{M_0} - \frac{1}{10^{N_0}},\ x_{M_0} + \frac{1}{10^{N_0}}\right]$$

noté I_0.

En prenant $N_1 > N_0$, il existe $M_1 \geq M_0$ tel que pour tout $n, m \geq M_1$, on a $d_\infty(x_m, x_n) \leq \frac{1}{10^{N_1}}$, et tous les termes de la suite d'indices $n, m \geq M_1$ sont dans l'intervalle

$$I_1' := \left[x_{M_1} - \frac{1}{10^{N_1}},\ x_{M_1} + \frac{1}{10^{N_1}}\right];$$

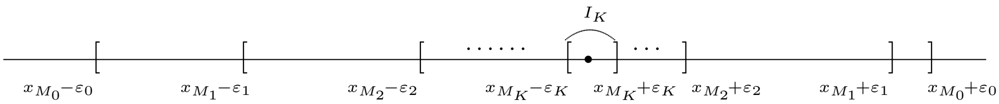
comme, a fortiori, ils sont dans I_0 puisque $M_1 \geq M_0$, ils sont dans $I_1 := I_0 \cap I_1' \subset I_0$ (l'intervalle I_1' n'est pas nécessairement contenu dans I_0, mais l'intersection des deux intervalles fermés est un intervalle fermé qui contient tous les termes de la suite au-delà de M_1).

On construit ainsi une suite d'intervalles emboités

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_K, \quad K \in \mathbb{N},$$

de longueurs majorées respectivement par $\varepsilon_k = \frac{1}{10^{N_k}}$, $k = 0, 1, \ldots, K$, où N_K tend vers l'infini.

On obtient le schéma suivant (la droite support est la «droite rationnelle» en dépit des apparences, la notion de droite n'ayant encore pas grand sens) :



Le fait que ces intervalles soient emboités, de longueurs strictement décroissantes vers 0, est essentielle car s'il devait y avoir une limite, celle-ci serait dans I_K, et serait donc connue à $\pm\frac{1}{10^{N_K}}$ près, ceci pour tout K. De fait, d'un point de vue ensembliste, $\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} I_k$ est soit vide soit réduit à un seul élément $\ell \in \mathbb{Q}$ (la limite).

Conclusion sur les propriétés de $\mathbb{Q}$. Le fait que cette intersection soit le plus souvent vide montre bien les propriétés topologiques étranges de $\mathbb{Q}$: il n'est pas discret, sinon, comme c'est un groupe additif, on démontre qu'il serait de la forme $\alpha\,\mathbb{Z}$ pour un $\alpha \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde même si $\alpha \neq 0$ est arbitrairement petit. Ce n'est pas un continuum au sens de $\mathbb{R}$ (infini non dénombrable) puisqu'il y a de nombreux « trous » comme on l'a vu à partir des suites de chiffres non périodiques.

Une propriété (triviale), peut-être utile d'un point de vue conceptuel pour la physique, est que $\mathbb{Q}$ est un groupe divisible (i.e., pour tout $x \in \mathbb{Q}$ et pour tout entier $n > 0$, il existe $y \in \mathbb{Q}$ tel que $x = n\,y$. C'est cette propriété qui fait que $\mathbb{Q}$ est arbitrairement « fin » et sera dense dans $\mathbb{R}$.

Sur le plan de la nature de l'espace physique, on a donc une difficulté essentielle à faire un choix dans le cadre archimédien évoqué ci-dessus (i.e., espace discret, dense mais à trous, continuum), et la théorie constructive des ensembles montre qu'il n'y a pas d'autre modèle archimédien.

Examinons alors une autre étrangeté qui se produit si on fait de l'analyse dans $\mathbb{Q}$ (pour les mathématiques aussi bien que pour la physique). Considérons le théorème dit des valeurs intermédiaires qui dit que si une foncion $f(x)$ de la variable x est continue (au sens naïf qui consiste à dire que si x varie très peu, alors il en est de mème pour $f(x)$), alors si il existe x_1 tel que $f(x_1) > 0$ et x_2 tel que $f(x_2) < 0$, alors il existe une valeur x_0 telle que $f(x_0) = 0$ (autrement dit, une telle fonction traverse nécessairement l'axe de x pour des raisons évidentes se lisant sur le graphe de f. Or rien n'est plus faux sur $\mathbb{Q}$ comme le montre l'exemple de :

$$f(x) = 2 - x^3 \ \ \& \ \ x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

puisque l'arthmétique élémentaire montre que 2 n'est pas le cube d'un rationnel.

Sur le plan de la physique, ce fait est assez frappant. On dit que la droite rationnelle $\mathbb{Q}$ n'est pas complète pour la métrique usuelle et qu'elle a (en un sens imagé) une infinité de trous et que le mathématicien voudra combler en construsant une infinité (de plus non dénombrable) de nouveaux nombres donnant (entre autres) l'exactitude du théorème des valeurs intermédiaires. Mais ces nouveaux nombres, dits «réels» de façon un peu provoquante, n'ont assurément qu'une existence intellectuelle (à notre avis).

Suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}^n$. De fait, la définition de suites de Cauchy de rationnels suffit pour traiter le cas des suites de Cauchy de vecteurs rationnels (i.e., dans $\mathbb{Q}^n$), mais l'aspect direct peut avoir un sens pratique.

Pour cela on considère la distance $d^n_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\ldots,n}(d_\infty(y_i, x_i))$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x_i, y_i \in \mathbb{Q}$; pour la topologie usuelle, cette distance est équivalente à la distance euclidienne, moins commode ici (les voisinages remplaçant les intervalles seraient des boules dont les intersections seraient compliquées). Il n'y a alors rien à changer par rapport au cas $n = 1$, sauf que les voisinages I_k sont des hyperparallélépipèdes fermés (un rectangle pour $n = 2$ et ensuite, par intersections, des hyperparallélépipèdes emboités dont le plus grand côté est de longueur tendant vers 0).

d) Construction de $\mathbb{R}$

A partir de la topologie définie par la distance usuelle $d_\infty(x, y) := |y - x|$, $x, y \in \mathbb{Q}$, on va obtenir, par le procédé dit de complétion, l'ensemble $\mathbb{R}$ [7] des nombres réels qui, dès les travaux de Cantor, montrait des propriétés pathologiques sur lesquelles nous reviendrons puisqu'elles définissent le hiatus physique/mathématique qui est l'objet de cette étude.

On considère une suite de Cauchy, pour laquelle on va créer une limite comme étant, par définition, la classe d'équivalence de la suite de Cauchy de rationnels considérée, deux suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dites équivalentes si $y_k - x_k$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Il

(7) http://www.universalis.fr/encyclopedie/nombres-reels, par Jean Dhombres.

est facile de voir que, dans le cas où tout se passe dans $\mathbb{Q}$, à savoir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{Q}$ et que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\ell' \in \mathbb{Q}$, alors $\ell = \ell'$ (on écrit que la quantité $x_k - \ell - (y_k - \ell') = x_k - y_k - (\ell - \ell')$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini).

La nécessité de considerer toutes les suites de Cauchy équivalentes vient du fait que l'illustration, donnée au moyen du développement décimal, n'est pas canonique (chaque classe contient une infinité de suites de Cauchy). Le fait de munir l'ensemble $\mathbb{R}'$, des classes d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels, de propriétés $(+, \times, \leq)$ est banal, fastidieux, mais sans mystère car provient des mêmes propriétés sur $\mathbb{Q}$ qui conserve des suites de Cauchy, et nous l'omettons.

Ce procédé fondamental permet de donner, pour la situation vue dans le § c), un sens au fait intuitif de l'existence de limites (de suites, de fonctions, définies sur $\mathbb{Q}$ dont on peut dire qu'il n'est pas complet) ; c'est sans doute à ce niveau que l'on perd, sans toujours s'en rendre compte, le « sens physique » de la manipulation des nombres entiers et rationnels (voir à ce sujet l'ouvrage de Henri Poincaré [P], Ch. II) :
http://www.ebooksgratuits.com/html/poincare_science_hypothese.html
Ensuite, on remarque que dans le corps $\mathbb{R}'$, on a le sous-corps $\mathbb{Q}'$ formé des classes des suites de Cauchy constantes $y_n = \frac{a}{b}$ pour tout n (nul besoin de faire appel aux développements décimaux partiels $x_n = \sum_{k=-k_0}^{n} \frac{e_k}{10^k}$ définissant une suite de Cauchy qui serait équivalente) ; de fait on obtient $\mathbb{R}$ par transport de structure faisant que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mais l'essentiel est bien dans la crétion physique de nouveaux nombres, dits non rationnels.

Seulement à ce stade, on peut écrire que tout élément ℓ de $\mathbb{R}$ est la limite d'une suite de Cauchy de rationnels de la classe définissant ℓ, comme celle de la suite des développements décimaux $x_n = \sum_{k=-k_0}^{n} \frac{e_k}{10^k}$ (ce qui a un sens puisque maintenant $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$). La suite des chiffre e_i est alors arbitraire et définit dans tous les cas un nombre réel ; il y a presque unicité dans la mesure où par exemple $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 0.9999\cdots = 1$ (il y a bien égalité : revenir à la définition de l'équivalence des deux suites de Cauchy $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$ et $y_n = 1$ pour tout n).
L'usage fait que l'on confond alors le nombre réel ℓ (très compliqué) avec son développement décimal (ou utilisant une autre base de numération). Par exemple, l'écriture décimale habituelle :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582 0\ldots$$

n'est pas tout à fait ce que l'on croit au niveau de la construction des nombres réels. En effet, le nombre réel π est de fait défini par une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels, et l'écriture ci-dessus n'est que le codage numérique d'un représentant de la classe, à savoir celui défini par la suite infinie de rationnels (équivalente, par définition, à l'écriture sous forme de la série correspondante $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{10^k}$, où les s_k sont les chiffres définissant π) :

$x_0 = 3$, $x_1 = 3,1$, $x_2 = 3,14$, $x_3 = 3,141$, $\ldots$,
$x_{24} = 3,141592653589793238462643$, $\ldots$

pour laquelle $x_m - x_n$ tend vers 0 lorsque m et n tendent vers l'infini de façon indépendante. Noter que trouver un tel représentant n'est pas effectif (il faudrait connaître «toutes les décimales» de π, ce qui n'est pas le cas) ; on peut même combattre l'idée reçue de la connaissance de π, dans la mesure où sa définition géométrique (qui suppose, après $\mathbb{R}$, de construire $\mathbb{R}^2$, puis l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$, et de donner un sens à la demi « longueur » de cette « circonférence ») n'est qu'un théorème d'existence uniquement mathématique.

Ce qui montre l'extrême complexité constructive d'un réel, sans parler du transport de stucture opéré à partir de $\mathbb{Q}$.

Notons que $\mathbb{R}$ est complet (heureusement) car toute suite de Cauchy de nombres réels est convergente vers un nombre réel (se démontre facilement avec les reprèsentants obtenus avec les développements décimaux).

Bien entendu, il y a d'autres procédés de construction de $\mathbb{R}$ (non unicité « matérielle », mais unicité « intellectuelle » car les résultats obtenus sont tous isomorphes pour les différentes structures : algébriques, topologiques, d'ordre). Le problème de définir $\mathbb{R}$ correctement s'est posé dès le 19-ème siècle et verra plusieurs réponses différentes équivalentes :

(i) Dedekind (1831–1916) propose de construire $\mathbb{R}$ par une théorie des coupures. [8]

(ii) Weierstrass (1815–1897) donne une construction des réels non rationnels basée sur les développements décimaux illimités non périodiques ; Heine (1821–1881) s'en inspirera.

(iii) Méray (1835 - 1911) et Cantor proposent une construction à partir des suites de Cauchy.

(iv) Cantor construit $\mathbb{R}$ en ajoutant aux rationnels les «limites» de suites de Cauchy, mais surtout en tire des conséquences ensemblistes révolutionnaires maintenant bien connues (cf. § 5) ainsi que [De1], [De2], [De4]) ;

---

(8) http://www.universalis.fr/encyclopedie/nombres-reels, § 5, par Jean Dhombres.

c'est le procédé de complétion que l'on enseigne en général aujourd'hui pour construire le corps des réels sans toujours s'apesantir sur le fait que la représentation des phénomènes physiques est (peut-être) du domaine des rationnels et non du réel mathématique, lequel devient alors un outil abstrait, non représentatif de la réalité intrinsèque du monde physique (une notion « émergente » peut-être).

(v) Une question, d'apparence oiseuse mais indispensable, serait :

« l'Univers (ou espace) physique est-il complet » ?

A condition de savoir de quel modèle ensembliste il dépend et pour quelle topologie.

e) Construction des $\mathbb{R}$-objets

Ensuite, après cette construction de $\mathbb{R}$ (le plus dur a été fait), on assiste à une débauche de constructions possibles que nous qualifierons de « $\mathbb{R}$-objets » pour signifier que le substrat fondamental est ce corps pathologique $\mathbb{R}$ des nombres « réels » :

(i) Le corps des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)\,\mathbb{R}[X]$$

(encore des classes d'équivalence sur les polynômes) [9] ou bien :

$$\mathbb{C} = (1,0)\,\mathbb{R} + (0,1)\,\mathbb{R}$$

muni des lois + et $\times$ bien connues définissant le « plan complexe », également des algèbres plus générales (corps des quaternions, systèmes hypercomplexes, ...).

(ii) Les espaces vectoriels usuels comme $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ..., $\mathbb{R}^n$, muni ou non de métriques, les courbes, surfaces, variétés dans ces espaces. Les groupes $SU(n)$ utilisés pour la description du modèle standard (cf. Chapitre II).

(iii) Notons que le calcul différentiel (équations différentielles, aux dérivées partielles) et ses généralisations prend place dans les espaces et variétés précédents et ne crée ou n'utilise que des $\mathbb{R}$-objets.

---

(9) Pour un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, l'indeterminée X n'est pas un nombre puisque justement on peut lui substituer n'importe quel nombre (notion d'homomorphisme d'évaluation $X \mapsto x$) tout en conservant les relations algébriques ; de fait sur un plan constructif, tous les étudiants connaissent la définition des polynômes (malcommode pour refléter les opérations somme et surtout produit) donnée comme suites de coefficients presque tous nuls $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ figurant $a_nX^n + \cdots + a_0$; on muni cet ensemble d'une somme évidente et d'un produit (dit de convolution) un peu moins évident qui amène à donner un rôle privilégié au polynôme $X := (0,1,0,\ldots,0,\ldots)$ qui n'est qu'une suite particulière pour laquelle $X^2 := (0,0,1,\ldots,0,\ldots)$, etc. Donc rien de nouveau sous le soleil.

Compte tenu de leur origine, ces $\mathbb{R}$-objets ont tous une topologie classique que l'on considère à la fois comme physique et mathématique et gouvernée par « le sens commun », à tort peut-être car il existe d'autres topologies a priori naturelles comme on l'a déjà évoqué et que nous allons détailler dans le paragraphe suivant (voir aussi le Commentaire 31).

3) Valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

Revenons au corps des rationnels $\mathbb{Q}$ pour indiquer que d'après le théorème d'Ostrowski les seules valeurs absolues $|\,.\,|$ (qui définissent la distance associée $d(x, y) = |y-x|$) sont la valeur absolue usuelle $|\,.\,|$ notée ici $|\,.\,|_\infty$ (conduisant à d_∞), les valeurs absolues p-adiques $|\,.\,|_p$ (conduisant à d_p), et la valeur absolue triviale sans intérêt ($|0| = 0$, $|x| = 1$ pour tout x non nul). On reviendra sur ces aspects dans le Chapitre IX pour montrer que d'autres types de topologies existent, même sur $\mathbb{Q}$.

On peut donc procéder par complétion relativement à ces métriques p-adiques pour obtenir les corps $\mathbb{Q}_p$ tout aussi pathologiques que $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ (même cardinalité). En effet, il est inutile de refaire le raisonnement avec les suites de Cauchy du § c), étant entendu que in fine, la représentation « en base p » d'un élément x de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit, pour $k_0 \geq 0$ convenable :

$$x = \sum_{k=-k_0}^{\infty} e_k\, p^k, \quad e_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

On remarque que $\sum_{k=-k_0}^{0} e_k\, p^k = \frac{e_{-k_0}}{p^{k_0}} + \cdots + \frac{e_{-1}}{p} + e_0$ est ici la partie entière en p-adique car ce sont les puissances positives de p qui sont « grandes ».

Pour être complet, disons que l'on construit les corps $\mathbb{C}_p$, algébriquement clos, analogues à $\mathbb{C}$ mais avec des topologies ultramétriques inhabituelles (l'ultramétricité de la distance d signifie qu'en plus des axiomes usuels, on a $d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(y, z))$, pour tout x, y, z, avec $d(x, y) = \max(d(x, z), d(y, z))$ dès que $d(x, z) \neq d(y, z)$) ; mais on a depuis longtemps proposé d'examiner la physique fondamentale sous l'angle p-adique ; les principaux fondements ont été initiés par Igor V. Volovich [Vol].

a) physique fondamentale p-adique

On peut lire dans la version anglaise de Wikipédia [10] le texte introductif suivant à la physique p-adique :

(10) http://en.wikipedia.org/wiki/P-adic_quantum_mechanics

Many studies of nature deal with questions that occur at the Planck length, in which ordinary reality doesn't seem to exist. In some ways, the experimental apparatus and experimenter become indistinguishable, so that no experiments can be done. The unification of the immensity of cosmology with the Hilbert space formalism of Quantum Mechanics presents a formidable challenge. Most researchers feel that the geometry and topology of the sub-Planck lengths need not have any relation whatever to ordinary geometry and topology. Instead the latter are believed to emerge from the former, just as the color of flowers emerges from atoms. Currently many frameworks have been proposed, and p-adic analysis is a reasonable candidate, having several accomplishments in its favor.

Another motivation for applying p-adic analysis to science is that the divergences that plague quantum field theory remain problematic as well. It is felt that by exploring different approaches, such inelegant techniques as renormalization might become unnecessary. Another consideration is that since no primes have any special status in p-adic analysis, it might be more natural and instructive to work with adèles.

COMMENTAIRE 25 **Volovich considère ici un objet mathématique particulièrement élaboré, l'anneau $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ des adèles de $\mathbb{Q}$, que l'on décrira au § 7) De tels objets sont donc des produits cartésiens d'un nombre dénombrables d'ensembles ayant la puissance du continu (i.e., équipotents à $\mathbb{R}$; ils sont donc aussi équipotents à $\mathbb{R}$ (pas plus, mais pas moins, ce qui ne résoud pas le problème des cardinalités pour la physique). Il poursuit :**

There are two main approaches to the subject. The first considers particles in a p-adic potential well, and the goal is to find solutions with smoothly varying complex-valued wavefunctions. Here the solutions to have a certain amount of familiarity from ordinary life. The second considers particles in p-adic potential wells, and the goal is to find p-adic valued wavefunctions. In this case, the physical interpretation is more difficult. Yet the mathematics often exhibit striking characteristics, therefore people continue to explore it. The situation was summed up in 2005 *by one scientist as follows: I simply cannot think of all this as a sequence of amusing accidents and dismiss it as a «toy model». I think more work on this is both needed and worthwhile.*

Un aspect similaire d'une ampleur considérable a été proposé par Matti Pitkänen [Pit] et sa «géométrodynamique topologique» (TGD en anglais) :

p-adic numbers have turned out to be much more fundamental than I believed first. With the realization that TGD reduces to a generalized *number theory, it became clear that space-time decomposes into real and p-adic regions. The only possible interpretation for p-adic regions is as correlates for intentional action and cognition and thus the mind stuff of Descartes.*

The fusion of real and p-adic physics to single coherent whole forces a generalization of number concept obtained by gluing real and p-adics along rationals and common algebraics. p-adicity leads to precise predictions for elementary particle masses and it is possible to understand the origin of the elementary particle mass scales number theoretically. p-adic length scale hypothesis which is cornerstone of TGD and is now deducible from basic quantum TGD.

COMMENTAIRE 26 : **Cette vision, que nous considérons comme légitime en raison de l'existence mathématique naturelle de ces topologies pour lesquelles la nature n'a aucune raison de privilégier uniquement celle qui est « archimédienne », possède exactement les mêmes défauts pathologiques que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et il est probable qu'il faille réduire les prétentions d'une façon encore inconnue. En effet, le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est complet pour aucune des topologies p-adiques, ce qui oblige (a priori) à construire les complétions $\mathbb{Q}_p$, voire leurs clôtures algébriques complètes $\mathbb{C}_p$. Mais les aspects topologiques semblent intéressants et pas toujours bien connus (voir par exemple § 5) et [SW], [Sh]).**

En outre Matti Pitkänen considère des nombres premiers p fixés voire particuliers (comme par exemple des nombres de Mersenne) et utilise aussi la « théorie des nombres non standard » conduisant aux « nombres premiers infinis » dont l'usage n'est pas nouveau.

Enfin, de nombreux travaux établissent des liens manifestes entre nombres premiers, fonction zéta de Riemann, et mécanique quantique (voir par exemple [G]). □

4) Universalité du processus mathématique

Il n'y a rien d'autre qui puisse être obtenu à partir de topologies métriques sur $\mathbb{Q}$, lequel n'est qu'une conséquence automatique de la notion de nombre entier ; ceci donne tous les «nombres» à la base d'autres constructions d'objets.

Toutes les objets usuels non évoqués en détail (espaces vectoriels, matrices, variétés, fonctions de variables réelles ou complexes, suites et séries de fonctions, etc.) sont construits comme précédemment, et sont donc, en général, des $\mathbb{R}$-objets. La théorie de la mesure et l'intégration (Riemann, Lebesgue) font non seulement appel aux $\mathbb{R}$-objets, mais reposent sur des propriétés ensemblistes très subtiles au-delà même des questions de cardinalités (ensembles de $\mathbb{R}^n$ de mesure nulle, etc.). [11]

Ceci fait que l'on peut affirmer avec conviction que sur toute planète où se trouverait une intelligence suffisante, les bases mathématiques (pour la physique entre autres) y seraient les mêmes, au vocabulaire près, à la chronologie près, et au niveau de rigueur et de développement près.

Ceux qui prétendent le contraire (parfois des esprits éclairés) voient les mathématiques comme un ensemble d'élucubrations, qui seraient par essence multiples et soumises au hasard, ce qui est tout le contraire comme on a essayé de le prouver en montrant le côté inéluctable des différentes «opérations canoniques» effectuées à partir de la notion de nombre entier, ceci au moins jusqu'à la notion de complétion (conséquence directe du phénomène expérimental des suites de Cauchy), et même sans doute celle de clôture algébrique d'un corps, car ces constructions répondent à des questions naturelles qui ont une réponse unique.

Par contre, les « grandes théories », lesquelles sont aussi et surtout des outils puissants pour l'obtention de résultats mathématiques profonds (nos « Large Hadron Collider » en quelque sorte) peuvent par contre différer d'une planète à l'autre, si l'on peut dire, puisqu'elles résultent de l'inventivité (voire du génie) de certains esprits et de l'aspect collectif de leur exploitation.

Nous n'avons pas parlé de la géométrie qui est sans doute au départ inspirée par la perception du monde physique (amusants échanges d'élaborations de la pensée), d'où sans doute des droites, triangles, et cercles sur toute planète habitée. Les objets géométriques, tout en coexistant avec les débuts de l'arithmétique (i.e., les nombres entiers), ne se distinguent pas de l'approche ensembliste «à la Cantor» : tout côté, cercle, droite est un $\mathbb{R}$-objet, sans parler de la question naturelle du rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle, ou plus simplement de la longueur de la diagonale du carré de côté unité. Seuls les raisonnements sont spécifiques.

Le paragraphe suivante va préciser un peu mieux la situation car un objet mathématique a le droit d'être fini ou dénombrable contrairement au cas des $\mathbb{R}$-objets par nature infinis non dénombrables. En outre, il pose à nouveau le dilemme fondamental illustré au Chapitre I.

---

(11) http://www.universalis.fr/encyclopedie/integration-et-mesure, par André Revuz.

5) La question cruciale des cardinalités en mathématique et ailleurs.

Il s'agit de donner une idée de la complexité ensembliste (et pas plus) des objets crées en mathématique dans l'optique de leur exploitation en physique. Comme on est obligé de partir de la notion de nombre entier (naturel) un peu d'activité bourbachique nous permet de définir les nombres entiers comme cardinaux d'ensembles finis, la notion de cardinal étant assez simple et générale :

On dit que deux ensembles E et F ont même cardinal s'ils sont équipotents c'est-à-dire s'il existe une application bijective de E sur F, ce qui constitue une relation d'équivalence sur «l'univers des ensembles» (ne pas chipoter sur les aspects axiomatiques qui de toutes façons ne changent rien, même si l'ensemble de tous les ensembles ne peut pas exister de façon évidente). Le cardinal étant en quelque sorte l' «invariant commun» à tous les éléments d'une classe fixée.

Le cardinal des ensembles vides (un seul suffit noté $\emptyset$) définit 0, le cardinal de l'ensemble $\{\emptyset\}$ (intuitivement ensemble contenant un unique objet) définit 1, celui de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (intuitivement ensemble contenant deux objets logiquement distincts) définit 2, etc. par des inductions bien connues, mais encore non uniques, ce qui n'a pas d'importance car on ne peut rien trouver d'autre. Pour des raisons logiques de constructions futures, et vu la non-unicité habituelle, il est commode, comme l'avait proposé Von Neumann [12] (articles de 1925 à 1929 consacrés à l'axiomatisation de la théorie des ensembles), de poser :

$$0 \ := \emptyset; 1 = \{\emptyset\}; 2 \ := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \ldots; n+1 \ := \{\emptyset, n\} = \{\emptyset\} \cup \{n\}; \ldots$$

bien qu'il s'agisse d'un abus d'écriture. On a donc construit les cardinaux finis et on obtient leur ensemble (noté $\mathbb{N}$) qui lui n'est pas fini et est dit par définition de cardinal dénombrable. Noter que tout ensemble dénombrable (équipotent à $\mathbb{N}$) est nécessairement de la forme $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ où tous les a_i sont distincts. Si l'on se reporte au paragraphe précédente, on peut dire que toutes les mathématiques reposent sur le vide $\emptyset$!

Disons que pour deux ensembles E et F, on a $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ si et seulement si il existe une application injective de E dans F (i.e., on peut identifier E à une partie de F). Autrement dit, si l'on admet le difficile théorème de Schröder–Bernstein (ou Cantor–Bernstein) qui dit

(12) http://www.universalis.fr/encyclopedie/john-von-neumann, par Jean-Luc Verley.

que deux cardinaux sont toujours comparables pour cette relation d'ordre (on a toujours $\mathrm{card}(E) \leq \mathrm{card}(F)$ ou $\mathrm{card}(F) \leq \mathrm{card}(E)$), alors on a les relations (sans commentaires) :

$$
\begin{aligned}
&0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots ,\\
&n = \mathrm{card}\{a_0, a_1, \ldots, a_n\} < \mathrm{card}(\mathbb{N}), \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad n,\\
&\mathrm{card}(\mathbb{N}) < \mathrm{card}(\mathbb{R}) \quad \text{(on y reviendra).}
\end{aligned}
$$

On notera que le théorème de Schröder–Bernstein est assez réaliste physiquement parlant, au moins pour les cardinaux finis.

Le plus important sans doute, pour notre démarche, est de retenir qu'il n'y a pas d'ensembles infinis (non finis) contenus dans $\mathbb{N}$ (ou équipotents à une partie de $\mathbb{N}$, ce qui revient au même) et qui soient non dénombrables ; autrement dit, toute partie de $\mathbb{N}$ est soit finie soit dénombrable, et tout ensemble infini non dénombrable est (sauf axiome contraire) équipotent à $\mathbb{R}$. Cette énorme trivialité pose question en physique dès que l'on veut décrire une entité concrète au moyen d'un objet mathématique ensembliste.

Ceci prive les physiciens de cardinaux un peu plus riches que les cardinaux d'ensembles finis et un peu moins irréalistes que les cardinaux d'ensembles infinis ; ceci dit, l'infini dénombrable peut être vu comme du fini évolutif (*infini potentiel* vs *infini actuel*). Il semble que cet aspect soit la seule porte de sortie raisonnable.

Il existe à ce sujet un grand nombre de travaux de philosophie des sciences sur l'histoire des «infinis» sans que cela ne donne d'autres solutions ensemblistes pour le monde physique, mais par contre met en jeu les processus algorithmiques qui jouent sur cette ambivalence. [13] Voir également [De2].

Dans le § 2) on a pu voir que le premier stade (construction des nombres négatifs) crée des classes d'équivalence de cardinal égal à celui de $\mathbb{N}$ (dénombrable) ; ensuite un rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers qui rete un ensemble dénombrable comme union d'ensembles dénombrables.

On voit déjà avec effarement qu'il faut analyser de plus près le cas du cardinal $\mathrm{card}(\mathbb{R})$ dit «cardinal du continu» (au sens ensembliste de continuum utilisé en physique et non au sens topologique) et donc plus généralement du cardinal des $\mathbb{R}$-objets.

(13) http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?article183, par Hourya Sinaceur ; http://www.universalis.fr/encyclopedie/infini-mathematiques, par Jean Toussaint Desanti ; http://www.universalis.fr/encyclopedie/continu-et-discret, par Jean-Michel Salanskis.

Avant de poursuivre, puisque les nombres réels sont curieusement considérés comme des entités banales, rappelons quelques faits qui ont beaucoup perturbés les mathématiciens des siècles précédents :

(i) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable, mais sous l'angle topologique (figuré par la mal nommée « droite réelle »), il est dense dans $\mathbb{R}$ (autrement dit, « on ne voit rien » qui distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$).

(ii) Les nombres algébriques, qui sont les racines réelles ou complexes des équations de la forme $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ où les a_i sont entiers (ou rationnels, cela revient au même), forment un ensemble $\mathbb{A}$ dénombrable. Vus dans le plan complexe, on a la même remarque que pour $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: les nombres algébriques sont denses dans $\mathbb{C}$ (les rationnels sont évidemment algébriques).

(iii) Les nombres transcendants, éléments de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$, constituent un ensemble qui est équipotent à $\mathbb{C}$ donc à $\mathbb{R}$ (cardinal du continu). Autrement dit, le processus de « création de nombres » à partir des suites de Cauchy de rationnels n'ayant pas de limite, dépasse l'entendement.

Ces extravagances de cardinaux conduisent facilement aux célèbres propriétés que certains mathématiciens (!) dénoncent comme situations pathologiques :

(iv) Il y a équipotence de $\mathbb{R}$ et de son intervalle $[0, 1]$, puis équipotence de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, etc.

(v) Il existe une application surjective continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (courbe de Peano–Hilbert). [14]

(vi) Les objets $-n \in \mathbb{Z}$, $n > 1$, ainsi que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, sont des ensembles dénombrables dans la construction qui est faite en général.

(vii) Rajoutons le fait curieux suivant concernant la construction de $\mathbb{R}$ vue § 24. On a obtenu $\mathbb{R}$ sous la forme $\mathbb{Q} \cup \mathbb{R}'$ (réunion disjointe), où $\mathbb{R}'$ est l'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy de rationnels dont la « limite » n'est pas rationnelle. Or on a la propriété suivante : une telle classe d'équivalence est équipotente à la classe de 0 qui est l'ensemble C_0 des suites de rationnels tendant vers 0. Or cet ensemble C_0 est équipotent à $\mathbb{R}$.

En effet, soit ρ un réel écrit sous forme décimale auquel on associe la suite de rationnels :

$$A_\rho := \Big(\frac{\rho_0}{10^0};\ \frac{\rho_1}{10^1};\ \ldots;\ \frac{\rho_n}{10^n};\ \ldots \Big),$$

(14) http://www.universalis.fr/encyclopedie/giuseppe-peano, par Georges Glaeser.

où ρ_n est l'approximation modulo 10^{-n} de ρ. Par exemple, la suite associée à π serait :

$$A_\pi := \left(\frac{3}{10^0}; \frac{3,1}{10^1}; \frac{3,14}{10^2}; \frac{3,141}{10^3}; \ldots\right) = (3;\ 0,31;\ 0,0314;\ 0,003141;\ \ldots).$$

Il est clair que $A_\rho \in C_0$. Or l'égalité $A_\rho = A_{\rho'}$ implique $\frac{\rho'_n}{10^n} = \frac{\rho_n}{10^n}$ pour tout n, d'où $\rho'_n = \rho_n$ pour tout n, ce qui conduit par définition à $\rho' = \rho$. Donc C_0 est de cardinal supérieur ou égal à celui de $\mathbb{R}$ (il y a en fait égalité) ; bien entendu, cette allusion au cardinal de $\mathbb{R}$ n'est pas utilisée pour la construction elle-même, mais elle montre le jeu extravagant que constitue la « fabrication » effective d'un seul nombre réel en dehors de toute concession logique.

Ce fait, qui à juste titre n'a aucun intérêt dans la pratique mathématique et est en général passé sous silence, peut suggérer que tout système logique (la physique ?) conduit inexorablement à de telles situations de « réalité cardinalesque ».

(viii) Sur un plan plus imagé, si l'on «zoome» en un endroit arbitraire de la droite réelle, on obtient la même structure, et ceci indéfiniment ; la droite réelle est un élastique « infiniment fin » (sic) que l'on peut « étirer indéfiniment » sans le rompre (re-sic), ce que l'on peut qualifier de physiquement irréaliste. Une façon de comprendre la banalisation de l'usage des réels en physique, est que leur représentation mentale se confond avec la notion de valeur approchée (rationnelle) moins violente !

(ix) On peut trouver dans [De1], une illustration, au moyen des sous-ensembles négligeables de $\mathbb{R}$, qui montre qu'en l'état la droite réelle ne peut être associée à des réalités physiques, sauf peut-être à un niveau macroscopique, comme modèle approximatif permettant de faire des raisonnements plus commodes (faire de l'analyse classique dans $\mathbb{Q}$ n'est guère possible comme on l'a vu).

Nous renvoyons à [De2], où Jean-Paul Delahaye étudie le fameux problème de l'hypothèse du continu résolu par Paul Cohen sous certaines conditions, mais sauf à considérer les grands cardinaux dans un contexte logique nouveau pour une éventuelle utilisation en physique, on ne saurait envisager, directement au niveau naif, de tels cardinaux en physique.[15]

6) Conclusion

Rappelons que tous ces phénomènes mathématiques ensemblistes proviennent directement de l'axiome de l'infini :

(15) http://www.universalis.fr/encyclopedie/hypothese-du-continu, par Patrick Dehornoy.

Il existe un ensemble infini.

et de l'axiome du choix :

Pour tout ensemble E on peut, pour toute partie non vide P de E, choisir un élément $a_P \in P$.

Donc la famille des a_P (i.e., l'ensemble des couples (P, a_P)) existe mathématiquement comme objet, au sens développé au début.

Ceci dit, le renoncement à l'un ou l'autre de ces axiomes (aspect constructif des mathématiques, cf. [LQ]) conduit à des démarches plus algorithmiques qui ne laissent rien espérer de nouveau pour la physique, sauf peut-être en ce qui concerne leur caractère « fini évolutif ». Citons cette phrase tirée d'un texte de H. Lombardi [16] :

En fait nous devons faire face à une situation un peu paradoxale : les méthodes abstraites sont a priori douteuses, mais c'est un fait « expérimental » qu'elles ne nous trompent pas quand elles donnent un résultat de nature concrète.

Ceci justifie, a posteriori, que la démarche très ensembliste de tout ce Chapitre III (presque une caricature des « mathématiques modernes » si décriées), que nous confrontons à la la démarche analogue en physique, est justifiée et a le mérite de la rapidité et de la clarté.

Ce qui précède semblerait suggérer que pour décrire une «réalité physique» , on soit obligé de définir une axiomatique des phénomènes utilisant ces mathématiques, lesquelles seraient par définition « non observables ». On pourra objecter que c'est bien ce que fait la physique actuelle, sauf que rien n'est explicité sous cet angle, notamment en ce qui concerne les objets de base ainsi que les notions d'expérience et de mesure sur ces objets.

Dans le chapitre suivant, nous allons essayer d'aborder modestement ce point de vue en analysant l'état de la question, tant du point de vue du physicien que du mathématicien.

(16) http://hlombardi.free.fr/laius.html

Chapitre IV

Notions d'objet réel en physique

De façon précise, la physique en tant que science décrivant des lois entre des phénomènes est naturellement amenée à utiliser des objets (comme les particules et interactions élémentaires), des grandeurs (l'énergie, le temps, les distances, les vitesses, etc.), et des constantes (vitesse de la lumière, constante de Planck, etc.). Il n'est alors pas étonnant que la physique associe à ces entités les objets mathématiques les plus proches (un nombre entier, fractionnaire, ou réel au sens des $\mathbb{R}$-objets), ce qui pose a priori une première difficulté.

On peut déjà se demander si ces objets physiques ont une définition possible (au moins de manière intellectuelle comme les objets mathématiques dont on a vu la précarité en raison d'une non unicité) ou si ils ont une existence indicible dans tout langage précis. Autrement dit, pour le néophyte, une particule ou une onde, c'est quoi concrètement, c'est fait de quoi ?

On voit que logiquement (par analogie avec les mathématiques), une définition précise (même abstraite) en physique n'a aucune raison d'être unique, mais qu'une définition des objets réels (dans un système logique axiomatisé) est nécessaire pour aller plus loin, surtout si l'on applique immédiatement une démarche purement mathématique ; le tout étant de savoir si, en physique, on peut atteindre un « niveau zero » des possibilités de définitions (au-delà même de la notion de particule élémentaire). Revoir à ce sujet les citations du Chapitre I.

De même, on peut dire que ce sentiment de hiatus entre la physique du très petit et les inexorables $\mathbb{R}$-objets utilisés pour la décrire, a conduit les physiciens à l'introduction des quanta, comme une ultime parade à l'absurdité manifeste des $\mathbb{R}$-objets pour décrire la physique du très petit (nous nous interdisons l'utilisation des termes « infiniement petit » et « infiniement grand » dans la mesure où les seuls infinis mathématiques envisageables sont les cardinalités de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{R}$, de sorte que la seule réalité de l'infiniement petit est l'ensemble vide ou 0, donc une absurdité).

Au sujet de l'infini et du temps, on peut lire dans [De4], au sujet du fait que d'un point de vue mathématique, la prédiction est toujours possible, le constat lourd de conséquences suivant :

Si le passé ne s'étend pas au-delà d'un certain instant initial (que les cosmologistes nomment Big Bang) alors le raisonnement ne peut plus se dérouler dans sa version discrète. Cependant, dans ses versions continues, le paradoxe persiste si on accepte l'idée d'un temps modélisé par des intervalles bornés de nombres réels, et donc il faudrait renoncer aussi à ce type de représentation pour le temps. Cela serait quand même payer très cher un paradoxe logique, et de toutes les façons, aujourd'hui en physique, nul ne dispose de moyen de se passer de l'infini ; cette solution n'est donc pas envisageable, il faut être moins violent.

En l'absence de réponse, il est difficile de faire le lien objets - cardinaux (qui semble incontournable au plan logique) et donc de même pour toute grandeur, puisque comme on l'a vu, tout objet mathématique est associé à un cardinal ; or les physiciens ne se privent pas de considérer que les objets mathématiques peuvent se plaquer sur les objets physiques, quitte à procéder à une fuite en avant sur les notions mathématiques à utiliser pour palier certaines difficultés. Donnons différents aspects empruntés essentiellement au cadre quantique.

1) Etats quantiques

On a déjà évoqué dans l'introduction le cas des états quantiques d'un système physique, à savoir que selon le principe de superposition, si un système physique peut se trouver dans deux états notés $|\phi>$ et $|\psi>$, alors l'ensemble d'états du système contient les combinaisons linéaires $\alpha|\phi> +\beta|\psi>$ où α et β sont deux nombres complexes quelconques.

Autrement dit, l'ensemble des états possibles d'un système physique serait un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

On a donc des formulations très « $\mathbb{R}$-objets » dans un contexte si particulier qu'elles n'ont pas manqué de poser problème aux physiciens ; on peut supposer que l'introduction de principes de probabilités et/ou d'incertitude est une tentative pour mettre un minimum de « flou » imposé par l'expérience (ou certaines contradictions logiques) ; mais il est clair que la théorie des probabilités fait partie de l'analyse réelle (ou des mathématiques discrètes lorsqu'on se limite à des ensembles finis), ce qui a priori ne change pas le hiatus originel. Quant à la notion intéressante d'incertitude, elle n'a peut-être pas d'interprétation mathématique mais demande à être définie (voir [De5], [De6]).

Par exemple, le formalisme rappelé dans l'introduction, à savoir l'interprétation des théories quantiques des champs, à l'aide de groupes de symétrie locale prenant la forme de groupes de Lie complexes du type $SU(n)$, est manifestement constitué de $\mathbb{R}$-objets qui sont sans doute naturels dans un contexte géométrique global traduisant l'expérience, mais probablement en contradiction avec un substrat physique comme expliqué plus haut.

2) Arguments géométriques ; multivers

Pour les mêmes raisons, un Univers infini pose un problème de cardinalité, et comme plus haut, ce sentiment de hiatus pour le décrire, a conduit les physiciens à l'introduction de possibles multivers, comme une ultime compatibilité, cette fois avec le cardinal du continu, donc d'un continuum physique.

Il existe plusieurs théories de multivers. Les plus citées sont :

a) Celle d'Hugh Everett, III [TW]

L'Univers (ainsi que l'observateur lui-même) fourche à chaque superposition linéaire d'état quantique sans que les lois fondamentales en soient changées. Cette interprétation offre une solution au problème de la mesure (illustré par le paradoxe du chat de Schrödinger).

Dans l'interprétation d'Everett, il n'y a jamais qu'un seul Univers, qui se scinde en plusieurs portions qui ne peuvent pas interagir les unes avec les autres en raison du phénomène de décohérence quantique. Citons Aurélien Barrau [1] :

La mécanique quantique, l'autre grande révolution physique du XXe siècle, peut elle aussi conduire à l'existence d'univers multiples. L'interprétation du physicien Hugh Everett, III (1930-1982) - qui n'est indiscutablement pas la plus orthodoxe mais qui présente l'immense avantage de ne nécessiter aucune hypothèse ad hoc supplémentaire - conduit naturellement à supposer que chaque mesure physique induit une décomposition de la fonction d'onde universelle en différentes branches et donc en différentes histoires et en différents mondes. Tout ce qui aurait pu se produire se produit effectivement dans l'un de ces mondes parallèles.

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/multivers, par Aurélien Barrau.

Autrement dit, des évènements contrefactuels (i.e., qui auraient pu se produire mais qui ne se sont pas produits), influent sur les résultats de l'expérience.

b) Celle d'Andreï Linde

Les Univers se définiraient dans un espace des possibles et dont chacun possèderait ses lois et/ou ses constantes « universelles » propres. On parle alors de « mousse d'univers ». De façon précise :

« *We are exploring a new theory based on a 15-year-old notion that the universe went through a stage of inflation. During that time, the theory holds, the cosmos became exponentially large within an infinitesimal fraction of a second. At the end of this period, the universe continued its evolution according to the big bang model. As workers refined this inflationary scenario, they uncovered some surprising consequences. One of them constitutes a fundamental change in how the cosmos is seen. Recent versions of inflationary theory assert that instead of being an expanding ball of fire the universe is a huge, growing fractal. It consists of many inflating balls that produce new balls, which in turn produce more balls, ad infinitum.* »

Linde a pu évoquer l'étrangeté du « bon » réglage des constantes physiques de notre Univers. On notera que ceci est une formulation du *principe anthropique*, qui lui n'est a priori pas incompatible avec les questions de cardinalités. [2]

c) Celle issue de la théorie des cordes

[3] Dans cette théorie, il est possible qu'une infinité d'univers à 4 dimensions coexistent sur des branes différentes, de la même façon que des pages d'un livre coexistent sans intersection.

Les forces fondamentales ne s'exerçant qu'au sein d'une même brane (à l'exception peut-être de la gravitation), il serait ainsi possible, théoriquement, de détecter les autres univers par cette interaction.

Commentaire 27 : **On peut relever un certain nombre d'approximations logiques par rapport aux cardinalités :**

(i) *l'Univers fourche à chaque superposition linéaire d'état quantique* **(toute combinaison $\mathbb{C}$-linéaire d'états possibles est un état possible) ; ceci implique, au plan cardinalités, un objet mathématique au pire de la forme U^U (ensemble des applications**

(2) http://www.universalis.fr/encyclopedie/principe-anthropique, par Marc Lachièze-Rey.

(3) http://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-des-cordes, par Alexis Durand.

de U dans U), où U représente l'Univers observable (donc un Univers) ; mais cet ensemble est hautement pathologique car de cardinal strictement plus grand que celui de U.

(ii) *un espace des possibles* **ramène, quelle que soit l'interprétation qu'on en fasse, aux cardinaux de U ou de U^U comme en (i).**

(iii) *une infinité d'Univers à 4 dimensions coexistent sur des branes différentes, de la même façon que des pages d'un livre coexistent sans intersection* **: déjà, selon la cardinalité de ce « livre », on obtient ici plutôt une réunion (finie, dénombrable, non dénombrable) d'exemplaires de U, ce qui redonne respectivement les cardinaux ci-dessus.**

Le commentaire ci-dessus, un peu gêné, ne peut s'empêcher de rajouter que :

il est vain de rechercher une signification physique à ce qui n'est et ce qui doit rester une pure formule mathématique.

Mais quelle est la légitimité de ces formulations, logiquement identiques entre elles, et dont le langage même emprunte à la théorie des ensembles ? Ces éventualités sont toutes de nature $\mathbb{R}$-objets, puisque toute coupe géométrique ou brane, ou tout sous-espace d'un multivers, ne peut être que de cardinalité infinie non dénombrable (le cas dénombrable n'ayant pas beaucoup de sens physique et, de toutes façons, ceci impliquerait que d'autres Univers du multivers sont eux des continuum). □

3) Les constantes universelles mesurabilité et incertitude.

Détaillons un autre exemple précis, celui des constantes physiques comme celle de la vitesse c de la lumière dans le vide.

De fait, la valeur entière $c = 299792458$ mètres par seconde est « exacte par définition » [4] si l'on choisit convenablement les définitions de longueur et de temps. De plus on souhaite que ces définitions soient extrêmement proches des définitions historiques.

La plus ancienne définition, concernant la seconde, provenant de l'année tropique de 1900 dont la durée fut estimée égale à $365,24219878125$ jours,

(4) Ce point de vue est en fait une conséquence de la confiance absolue des physiciens en la constance de la vitesse de la lumière dans le vide. On considère même aujourd'hui que la constance de la vitesse de la lumière est une conséquence très particulière de la relativité einsteinienne, due à la nullité de la masse du photon.

ce qui donne, pour la seconde s_0, la fraction $\frac{1}{365,24219878125 \times 24 \times 60^2}$ de cette année (grandeur fluctuante par ailleurs d'une année sur l'autre).

En 1960, la définition du mètre m_0 fut $m_0 := 1650763.73\,\lambda_0$, où λ_0 est la longueur d'onde de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux 2p10 et 5d5 de l'atome de krypton 86, très proche de l'ancienne définition « terrestre » du mètre égal à la dix-millionième partie de la moitié de méridien terrestre.

En 1978, avec ces définitions, la vitesse de la lumière est trouvée égale à $299792458,98 \pm 0,2$ mètres par seconde.

Par un exemple intéressant de résolution d'un problème d'approximation diophantienne on peut, par une infime modification de la définition de la seconde, on peut faire en sorte que $c = 299792458\,m/s$ avec une très grande précision, où le « nouveau mètre » m est alors, et par conséquent, la distance parcourue par la lumière dans le vide pour la durée $\frac{s}{299792458}$ (acquis en 1983). Autrement dit on a abandonné toute définition, via un étalon matériel, d'une unité longueur.

La valeur de la seconde qui satisfait au problème est alors la durée s de $9192631770\,\varpi$, où ϖ est la période de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux hyperfins $F = 3$ et $F = 4$ de l'état fondamental $6S\frac{1}{2}$ de l'atome de césium 1331, très proche de l'ancienne définition $s_0 := \frac{1}{31556925,9747} = \frac{1}{365,24219878125 \times 24 \times 60^2}$ de l'année tropique de 1900.

Ce tripatouillage, qui permet de définir la vitesse de la lumière comme un entier avec une exactitude allant jusqu'à la 14-ième décimale, n'empêche pas que la valeur exacte (si elle existe) de la lumière dans le vide est un nombre réel de la forme :

$$c = 299792458 \pm \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Il est intéressant de noter que la seconde a une définition discrète (par rapport à un phénomène physique stable), ce qui ne veut pas dire « absolue » compte tenu des possibles phénomènes quantiques et de la nature de l'espace-temps (voir Chapitre III). Le cas du mètre, n'utilisant qu'un entier en lien avec la définition de la seconde, est analogue.

Pour simplifier, nous dirons que les définitions de la seonde et du mètre sont intrinsèques, mais bien entendu, cette définition de c dépend d'une valeur très proche inconnue, ce qui place notre raisonnement sur cette valeur numérique proche d'un entier, sans rien changer logiquement puisque il n'a échappé à personne que présenté ainsi (en éludant la question des choix relatifs des unités temps, distance, vitesse), $c \in \mathbb{R}$.

Le mathématicien pose alors la question suivante : la milliardième décimale de c, « ici-même » à cet « instant », a-t-elle un sens (une existence intellectuelle, vu que toute mesure arbitrairement précise est exclue) :

(i) Réponse OUI. Dans ce cas, on peut par induction en déduire que c est bien une constante mathématique, sinon on aurait augmenté le seuil de la milliardième décimale, et alors on peut aller plus loin et demander : c est-il un entier, un rationnel, un nombre algébrique, ou un nombre transcendant comme π ?

On peut objecter que ceci n'est pas défini car dépend d'un système d'unités, mais les définitions «rationnelles» de la seconde s et du mètre m relativisent cette critique ; de façon plus précise, si une autre seconde s' est définie à partir d'un multiple entier d'une autre périodicité physique, on peut invoquer une rationalité quantique entre ces périodes, la définition correspondante m' du mètre restant rationnelle par rapport à s'. Autrement dit, il semble que toute existence de quanta en un domaine (énergies, distances, temps, ...) implique une quantification pour toute notion. On pourrait parler d'un quantum minimal générateur pour lequel tout autre quantum en serait un multiple entier (la constante de Planck en donne une idée, mais un mathématicien est bien incapable de dire si c'est le quantum « fondamental » de la physique qui serait alors de type discret).

(ii) Réponse NON. Dans ce cas, c n'est pas une constante, tout simplement, mais ceci se reporte sur la période ϖ ayant servi à définir la seconde.

Sans aller très loin, on voit dans ce cas que les mathématiques sous-jacentes sont pour le moins floues, sauf à imaginer que ϖ est une fonction de très faible amplitude. Mais fonction de quoi ; d'un temps discret, mais alors même pour une fonction $\varpi(t)$ définie sur un ensemble discret (a priori fini donc de cardinal raisonnable), les valeurs $\varpi(t_i)$, réelles, sont susceptibles du même questionnement (i) en plus élaboré.

Par ailleurs, la notion d'approximation n'est pas de même nature, car on se place dans une démarche abstraite et non dans l'optique d'une mesure (fût-elle virtuelle). Dans cette direction, la mécanique quantique admet des «principes d'incertitude» dont on ignore la formulation mathématique qui en est faite. D'après Jean-Marc Lévy-Leblon [5] :

Il s'agit de l'impossibilité pour la théorie quantique d'attribuer simultanément une valeur numérique précise à certains couples de grandeurs,

(5) http://www.universalis.fr/encyclopedie/incertitude

comme la position et la vitesse d'un « quanton » [nom générique pour les objets quantiques élémentaires].
En fait, si un quanton refuse de donner une réponse unique et sans ambiguïté à la question « Où es-tu et à quelle vitesse vas-tu ? », c'est, comme Paul Langevin l'avait bien vu dès les années 1930, que les concepts de position et de vitesse au sens classique (c'est-à-dire caractérisés par une valeur numérique unique et déterminée) ne sont pas adéquats à sa nature, et ne peuvent décrire son état correctement. Mais, dès lors que l'état du quanton est représenté par une notion nouvelle et spécifiquement quantique (celle de fonction d'onde, par exemple), il n'y a plus d'indétermination, et encore moins d'incertitude, sur cet état.

Commentaire 28 : **On ne peut mieux dire car, à tout le moins, ce principe devrait être globalisable à toute échelle, or à notre connaissance les équations du « modèle standard » de l'Univers [I] sont de bonnes vieilles équations aux dérivées partielles normalisées à l'aide de « constantes » appropriées, ce qui approche bien la réalité à de grandes échelles (encore que . . .), mais est intrinsèquement inadapté. Ce qui démontrerait l'inadéquation fondamentale de toute technique mathématique pour décrire la physique et la contradiction interne des calculs de la physique.** □

Afin de rendre justice à la pensée de physiciens sur ces questions, citons quelques unes de leur remarques ; de fait on pourait remplir des pages à ce sujet (voir [La], § 2.E) :

Niels Bohr [6] : *Il n'existe pas de monde quantique. Il y a seulement une description abstraite quantique. Il est faux de penser que la tâche du physicien est de découvrir comment est la nature. La physique s'occupe de ce que nous pouvons dire sur la nature.*

Werner Karl Heisenberg [7] : *Dans les expériences sur les phénomènes atomiques, nous avons affaire à des choses et à des faits, à des phénomènes qui sont tout aussi réels que les phénomènes de la vie quotidienne. Mais les atomes ou les particules élémentaires ne sont pas aussi réels ; ils forment un monde de potentialités ou de possibilités plutôt qu'un monde de choses ou de faits.*

Pascual Jordan [8] : *Les observations ne se contentent pas de perturber ce qui doit être mesuré, elles les produisent. Dans une mesure de la position, l'électron est forcé de prendre une décision. Nous le contraignons à*

(6) http://www.universalis.fr/encyclopedie/niels-bohr, par Léon Rosenfeld.
(7) http://www.universalis.fr/encyclopedie/werner-karl-heisenberg, par Léon Rosenfeld.
(8) http://www.universalis.fr/encyclopedie/pascual-jordan, par Viorel Sergiesco

occuper une position bien précise ; auparavant, il n'était ni ici ni là, il n'avait pris aucune décision concernant une position précise.

John Stewart Bell [9] : *Le problème est le suivant : la mécanique quantique ne s'intéresse qu'aux observations. Elle divise donc nécessairement le monde en deux, une partie qui est observée et une autre qui effectue l'observation. Les résultats dépendent de la façon dont est faite cette division, mais aucune règle précise pour le faire n'est proposée. Tout ce dont nous disposons est une recette qui, du fait des limitations pratiques auxquelles sont sujets les humains, est suffisamment non-ambiguë pour toute question pratique.*

4) Les questions de temporalité [10]

Commençons par citer le fait suivant comme point de départ :

En 2004, dans le laboratoire d'Optique Quantique de l'Université de Technologie de Vienne (Autriche), Ferenc Krausz et ses collaborateurs (*Direct Measurement of Light Waves*, Science 27, Vol. 305, 5688 (2004), 1267–1269) ont mesuré le plus petit intervalle de temps jamais enregistré en utilisant les émissions d'un laser UV, pulsées à 250 attosecondes, pour mesurer le plus petit saut quantique des électrons au cœur des atomes. Les événements qu'ils recherchent durent environ 100 attosecondes (10^{-14} secondes).

Ils sont encore loin d'approcher le « temps zéro » ni même la frontière ultime du temps. En effet, il existe en physique une sorte de mur du temps, c'est l'échelle de Planck. Le monde à l'échelle de Planck présente des dimensions inférieures à $6,62606957 \,.\, 10^{-34}$ cm et des durées inférieures à 10^{-43} secondes, soit moins d'un trillion de trillion d'attoseconde, c'est le temps de Planck. Qu'y a-t-il au-delà ou avant cette fraction de seconde ?

Ceci pose la question de la structure intime de l'espace et du temps par rapport à une description, usuellement en termes de $\mathbb{R}$-objets, confrontée à une quantification manifeste.

a) Relativité de la notion de temps

Une remarque consiste à dire que le corpus mathématique peut être considéré comme intellectuellement statique à condition d'envisager un ensemble assez grand de résultats, notion mal définie, en raison du fait que

(9) http://www.universalis.fr/encyclopedie/john-stewart-bell, par Maurice Jacob.

(10) Se réferer aux différents articles de « *Le temps est-il une illusion ?* » . PLS 397, novembre 2010.

sans une intervention intelligente décidant de définir de nouveaux objets (les groupes, les corps, les géométries, les produits tensoriels, etc.), il n'y a pas les résultats correspondants ou les théories (algèbre linéaire, théorie de la mesure, ...) qui vont servir d'outils ; par ailleurs on peut toujours définir des objets farfelus et étendre ainsi l'ensemble des résultats. Un peu comme un univers où l'ensemble des événements n'est pas défini a priori. L'Univers, sauf à le concevoir dans toute son histoire, est toujours vu comme un système évolutif qu'on a indexé sur une notion intuitive de temps, qui est probablement une obstruction à réformer. Plus précisement :

D'après le texte de C. Callender [Ca], le temps n'est peut-être pas une entité fondamentale. D'après certains physiciens, il pourrait émerger à notre perception dans le cadre d'un monde parfaitement statique. De même, [Ro] affirme que la notion de temps pose certaines difficultés à la physique moderne. Une issue à ce problème consiste à se passer de structure temporelle dans les théories fondamentales. Des physiciens ont montré que c'est possible.

De façon précise, la difficulté à édifier une théorie quantique de la gravitation, qui unirait la physique quantique et la relativité générale d'Einstein, conduit une partie des physiciens à mettre en doute la réalité du temps. De fait, il est possible de formuler les théories fondamentales sans utiliser de paramètre temporel. Mais il reste à expliquer comment se construit le temps, c'est-à-dire comment il vient s'imposer à notre intuition.

Cette vision des choses nous paraît extêmement importante et nécessaire pour un « ajustement » de la physique sur les mathématiques dans un cadre d'une théorie physique axiomatique par essence statique. Citons un extrait (Marc Lachièze-Rey, PLS 397, novembre 2010), liant tout naturellement temps et métriques.

b) Vers la disparition de la métrique.

A un niveau plus fondamental, selon la théorie de la relativité, la durée propre d'un processus physique découle de certaines propriétés de l'espace-temps ; et plus précisément de ce qu'on appelle sa métrique, c'est-à-dire la façon dont les distances sont définies dans l'espace-temps.

Autrement dit, la durée propre qu'un système physique perçoit, et peut mesurer, peut être vue comme le résultat d'une interaction avec la métrique de l'espace-temps dans lequel il évolue (...).

Ce dernier bastion à caractère temporel pourrait lui aussi être remis en question. En effet, les approches de gravité quantique évoquées -

« gravité quantique à boucles », « écumes de spin » et autres théories apparentées - impliquent non seulement l'absence de temps, mais aussi de toute structure d'espace-temps préalable, ou au moins d'une métrique. La métrique n'est pas considérée comme existant a priori, mais comme une conséquence attendue de la théorie. On parle de background independance, qu'on pourrait traduire par « indépendance par rapport au cadre ».

L'absence de métrique entraîne celles des durées propres qui en découlent, ainsi que de la causalité. La disparition du temps est une chose, bien établie aujourd'hui, mais celle de ces notions plus fondamentales en est une autre...

Toutes ces réflexions sont loin d'être achevées et font l'objet de recherches actives. Mais il est incontestable que la relativité a définitivement condamné la plupart des propriétés du temps et des notions qui s'y rapportent. Il y a toutes les raisons de penser que cette disparition est fondamentale, et doit être prise en compte dans une approche plus large de la physique.

c) Le temps reconstruit par la thermodynamique
Le temps, effet de notre ignorance ?

Citons sans commentaires l'extrait suivant du textede C. Rovelli [Ro] qui illustre d'une façon claire les questions de rapprochement des deux disciplines :

Cependant, pour prendre au sérieux cette image d'un monde dépourvu de temps, un pas conceptuel reste à franchir. Si, au niveau fondamental, le monde peut être décrit sans référence à une notion de temps, en quoi consiste ce flux continu que nous percevons au quotidien, qui semble diriger nos vies et que nous appelons « temps » ? S'il ne régit pas le monde au niveau fondamental, comment et dans quels contextes émerge-t-il ?

Une réponse possible à cette question consiste en l'idée de « temps thermique », proposée vers 1993 par le mathématicien français Alain Connes et moi-même. Essayons d'en expliquer l'essence. Dans la physique usuelle, on décrit l'évolution « dans le temps » de nombreux systèmes différents. Ces derniers peuvent être regroupés en deux classes différentes : les systèmes mécaniques et les systèmes thermiques.

A la première classe appartiennent tous les phénomènes où la chaleur et la température ne jouent aucun rôle important (par exemple l'oscillation d'un pendule ou le mouvement des planètes). La seconde classe est celle *des systèmes qui présentent d'importants échanges de chaleur ou variations de température (par exemple une bougie qui brûle, ou un gaz sous pression qui se détend quand on ouvre un récipient).*

Tant en mécanique qu'en thermodynamique, les physiciens utilisent des équations qui contiennent la variable « temps » : ils étudient comment le pendule oscille « au cours du temps » ou comment une bougie se consume « au cours du temps ». On dispose dans les deux cas des équations d'évolution dans le temps. Mais s'agit-il vraiment du même temps dans les deux situations ? On soupçonne que la réponse puisse être négative. Des différences existent et sont même notables.

La plus importante est que les phénomènes de la première classe sont réversibles, c'est-à-dire que si je les filme et que je regarde le film à rebours, de la fin vers le début, je vois un phénomène possible (l'oscillation renversée dans le temps d'un pendule sans frottement ne diffère pas de l'oscillation initiale). En revanche, les phénomènes de la seconde classe sont irréversibles : le film projeté à rebours montre un phénomène impossible, ou du moins jamais observé (un gaz ne se recomprime pas spontanément dans une partie d'un récipient après s'être dilaté).

Mais cette différence reflète quelque chose d'encore plus important. On a vu que l'on peut éliminer la variable temps des équations de la mécanique. Or il n'en est pas de même pour les équations de la thermodynamique ! En thermodynamique, il n'est pas possible de remplacer le temps par une mise en relation des grandeurs observables, les unes par rapport aux autres. Ainsi, la deuxième loi de la thermodynamique, qui stipule que l'entropie d'un système isolé ne décroît jamais « au cours du temps », est une équation que l'on ne peut pas traduire sous une forme relationnelle. Le « temps » qui apparaît dans les équations de la thermodynamique semble essentiel pour décrire le monde tel que nous l'observons.

Il convient alors d'introduire deux concepts différents, le « temps mécanique » et le « temps thermique ». Nous avons vu que nous devons renoncer au « temps mécanique » pour bien comprendre le monde. Mais le temps thermique est peut-être la véritable grandeur physique qui est à l'origine de notre conception intuitive du temps. Tout bien réfléchi, quand nous pensons au temps, nous lui associons de nombreuses caractéristiques apparentées à la thermodynamique. Par exemple, le temps de notre expérience quotidienne est irréversible. L'intuition que nous avons du temps correspond à quelque chose qui «s'écoule», à un «flot» qui a une direction déterminée. Tout cela a beaucoup plus de points communs avec les phénomènes irréversibles de la thermodynamique qu'avec le monde parfait et réversible de la mécanique.

Par conséquent, si l'on cherche à retrouver la notion intuitive de temps à partir d'une théorie fondamentale dépourvue de temps, on doit se tourner vers la thermodynamique. La physique de la fin du XIXe siècle a montré que la thermodynamique n'est autre que la description approximative, macroscopique, de systèmes formés d'un nombre immense de composants, tels les atomes dont est constitué un gaz. Les lois de la thermodynamique sont liées au fait que nous ignorons la mécanique détaillée de chacun des composants du système. La chaleur correspond ainsi à l'agitation chaotique des atomes et des molécules, agitation qu'il nous est impossible d'observer ou de connaître en détail. L'ignorance des détails microscopiques nous amène à décrire un gaz de façon moyenne, probabiliste, et cette description approximative conduit à la thermodynamique.

Si le seul véritable temps physique réside dans les phénomènes thermodynamiques, et si ces derniers ne sont qu'un effet des moyennes et de notre ignorance de ce qui se passe à l'échelle microscopique, il s'ensuit que l'impression du temps elle-même n'est due qu'à notre ignorance de la dynamique détaillée au niveau microscopique. Cette idée radicale est connue sous le nom de l'« hypothèse du temps thermique ».

Cette idée a pu être exprimée de façon plus précise et mathématique, et étendue au cadre de la physique quantique. La démarche s'inspire notamment de la description probabiliste de l'état d'un système en physique statistique. L'une des pierres angulaires de cette discipline est que tout système tend vers un état d'équilibre où la probabilité de chaque microétat (c'est-à-dire chaque configuration possible des positions, vitesses, etc. des composants microscopiques du système) est proportionnelle à l'exponentielle

$$\exp(-E/kT),$$

où E *est l'énergie totale de la configuration,* T *la température et* k *une constante (la constante de Boltzmann). Comme le système tend vers cette distribution de probabilité, celle-ci définit de façon naturelle une direction d'évolution, c'est-à-dire un « temps ».*

On peut en quelque sorte inverser les choses et partir de l'« état statistique » d'un système (la donnée des probabilités de chacun des microétats), quel que soit cet état, et en déduire un « flot » associé, que l'on peut interpréter comme une évolution temporelle et qui définit ainsi un temps.

Sur le plan mathématique, ces idées se sont beaucoup appuyées sur des travaux des mathématiciens japonais Minoru Tomita et Masamichi Takesaki, réalisés vers 1970 et concernant les algèbres de von Neumann, *des structures abstraites d'opérateurs utilisées notamment dans l'étude du formalisme mathématique de la physique quantique. En particulier, la théorie de Tomita-Takesaki permet de calculer une « évolution temporelle » à partir de tout état statistique. Et une analyse mathématique du « temps de Tomita » ainsi défini montre qu'il a effectivement les propriétés que nous associons habituellement au temps.*

Le temps mécanique, nous l'avons vu, doit être éliminé de la mécanique classique, de la relativité et de la mécanique quantique, et il peut l'être.

Restait à expliquer à quoi est due notre perception intuitive du temps, et nous avons proposé comme solution la notion de temps thermique. Si cette vision des choses est correcte, le temps n'est, en somme, rien d'autre qu'un effet de notre ignorance de l'état microscopique des systèmes macroscopiques.

5) La géométrie non-commutative

Il est difficile de faire l'impasse sur les travaux de Alain Connes conduisant à la géométrie non-commutative en vue de décrire la physique fondamentale, notamment en liaison avec la notion de temps évoquée au § 4) précédent. Ceci étant, cet aspect renouvelle la notion d'état quantique, au sens rappelé sommairement dans l'introduction, mais est toujours exprimé en termes de $\mathbb{R}$-objets.

Pour donner une idée très partielle, nous reproduisons un texte issu d'un communiqué de presse du CNRS à l'occasion de la remise de la médaille d'or 2004 du CNRS à Alain Connes :
http://www2.cnrs.fr/sites/communique/fichier/la_geometrie_non_commutative.pdf

Les mathématiques fonctionnent sur deux registres complémentaires, le «visuel», qui perçoit instantanément le sens d'un théorème sur une figure géométrique, et l'« écrit », qui s'appuie sur le langage, sur l'algèbre, et s'inscrit dans le temps. Selon Hermann Weyl, « l'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre » se partagent la scène, ce qui illustre bien les difficultés respectives des deux domaines.

Les travaux d'Alain Connes s'inscrivent dans la relation entre ces deux registres.

Jusqu'à la découverte en 1925 de la mécanique quantique, la géométrie classique était basée sur la dualité, inaugurée par Descartes et l'introduction des coordonnées cartésiennes, entre géométrie et algèbre commutative. L'algèbre commutative, celle que nous avons tous apprise à l'école, *est une algèbre où le produit de deux quantités algébriques ne dépend pas de l'ordre des termes, c'est-à-dire que A fois B est égal à B fois A.*

Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne commutent plus. Alain Connes illustre son propos : « ce n'est pas la même chose d'ouvrir une canette de bière et de la boire, et d'essayer de la boire puis de l'ouvrir ».

Le but de la géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie et à adapter l'ensemble des outils mathématiques, dont le calcul infinitésimal et la cohomologie à ces nouveaux paradigmes.

Loin d'être une simple généralisation, l'intérêt initial de la théorie provient de phénomènes entièrement nouveaux et inattendus qui n'ont pas de contrepartie dans le cas « classique » commutatif. Le premier de ces phénomènes est l'apparition naturelle du « temps » à partir de la non-commutativité. Il s'agit là du résultat clé de la thèse d'Alain Connes, qui lui a permis de donner une classification des algèbres d'opérateurs (algèbres de Von Neumann).

La géométrie Riemannienne classique (commutative) qui provient de la découverte au 19e siècle de la géométrie non-euclidienne et sert de cadre à la relativité générale d'Einstein a été ainsi généralisée au cadre « quantique ». Les notions clé de mesure des distances et de courbure s'étendent au cadre non-commutatif mais acquièrent un sens nouveau.

En fait, le passage de la mesure des distances en géométrie Riemannienne à la mesure des distances en géométrie non-commutative est l'exact reflet de l'évolution de la définition du mètre dans le système métrique (1960). La définition originale du mètre, vers la fin du XVIIIe siècle était basée sur le « mètre des archives » défini comme une fraction (1/40 000 000) de la plus grande longueur directement mesurable, à savoir la circonférence terrestre. Un changement radical s'est produit en 1960 : le mètre a été redéfini comme un multiple de la longueur d'onde d'une raie spectrale orange de l'isotope 86 du krypton. Plus récemment, en 1983, la définition actuellement en vigueur a été arrêtée, elle utilise le spectre de l'atome de césium, et s'exprime en unité de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion pour relier temps et longueur.

COMMENTAIRE 29 : **Nous avons expliqué ceci en détails au § 3). Le changement de nature venant en effet du fait que l'on utilise des définitions plus intrinsèques que les définitions historiques. Mais encore une fois,** « *le mètre (. . .) s'exprime en unité de temps en utilisant la vitesse de la lumière comme facteur de conversion pour relier temps et longueur* » **ne change pas le caractère a priori $\mathbb{R}$-objet de cette vitesse sauf à établir l'existence d'un quantum de base pour toute notion.** □

Le passage de la géométrie de Riemann à la géométrie non-commutative est l'exact parallèle de l'évolution ci-dessus pour le mètre étalon. La mesure des distances utilise les algèbres d'opérateurs. On obtient ainsi une notion d'espace géométrique de nature spectrale, d'une très grande flexibilité.

La géométrie non-commutative traite à la fois d'espaces de dimension nonentière, d'espaces de dimension infinie, et surtout d'espaces de nature «quantique», et enfin de l'espace-temps lui-même si l'on prend en compte non seulement la force électromagnétique (qui avait conduit Poincaré, Einstein et Minkowski à leur modèle de l'espace-temps) mais aussi les forces faibles et fortes qui conduisent à un modèle noncommutatif de l'espace-temps.

Dans la théorie générale des espaces non-commutatifs, la notion de point est remplacée par celle « d'état » du système qui joue un peu le rôle de « nuage de points » et qui est de nature « quantique ». Néanmoins, la mesure des distances, grâce à sa formulation spectrale, continue à avoir un sens et se réduit à la longueur du plus court chemin entre deux points dans le cas classique.

Cette nouvelle géométrie prolonge la géométrie classique de Riemann, mais chacune des notions classiques acquiert un sens nouveau. Par exemple, la courbure d'un espace, qui joue un rôle essentiel dans la formulation des équations d'Einstein de la relativité générale, continue à avoir un sens mais devient, pour un espace à quatre dimensions, le calcul de la surface de cet espace. En particulier, cela permet de reformuler de manière purement géométrique et très simple la théorie qui couple la gravitation d'Einstein avec le modèle standard des particules élémentaires.

Alain Connes a récemment travaillé sur la compréhension de la «Renormalisation».[11] *Dans un premier temps, en collaboration avec D. Kreimer,*

(11) En théorie quantique des champs, la renormalisation est un ensemble de techniques d'analyse utilisé pour traiter et éliminer de certains calculs des valeurs infinies illégitimes.

il a relié le « tour de passe-passe » utilisé par les physiciens pour éliminer les quantités infinies au 21e problème de Hilbert.

En fait, plus récemment, en collaboration avec M. Marcolli, A. Connes a trouvé la signification de la correspondance de Riemann-Hilbert impliquée dans ce problème de physique et cela les a conduit à identifier un groupe de symétrie qui avait été « deviné » par P. Cartier sous le nom de « groupe de Galois Cosmique ».

Ceci établit un lien tout à fait inattendu entre la théorie de Galois, sous sa forme la plus sophistiquée, et la partie de la physique quantique qui est la mieux testée par l'expérience.

Voir également les textes suivants de A. Connes : *Noncommutative geometry and physics*, *A View of Mathematics*, *Renormalisation et symétries galoisiennes* [12].

6) Formalisme et physique

Si l'on admet que l'Univers (ou un univers, un multivers, ...) est un système logique, susceptible d'une formalisation axiomatique de type mathématique, il semble impératif de partir, comme en mathématique fondamentale, d'objets précis (mais complexes peut-être au sens des cardinaux), qui constitueraient les briques véritablement élémentaires (« non observables » pour des raisons intrinsèques), pour lesquelles les notions de physique classique (particules, champs, quanta de diverses nature, interactions, etc.) seraient des objets obtenus à partir d'opérations mathématiques standard, comme le fait de considérer des relations d'équivalence ou structures quotients (cf. Chapitre VII), des principes topologiques inusités (cf. Chapitre IX), afin d'obtenir des objets réels, non uniques au sens constructif comme on l'a vu pour les nombres négatifs, les rationnels ..., mais uniques en un sens intellectuel évident, et pour lesquels tout raisonnement mathématique classique s'appliquerait et donnerait des résultats légitimes.

Il serait intéressant de montrer que ceci est logiquement possible ou au contraire logiquement impossible, ce dernier cas ayant une incidence philosophique importante sur laquelle il est inutile de s'étendre.

Autrement dit, vouloir une physique « visible », prétendre s'appuyer sur des expériences « arbitrairement fines » alors que nous sommes des parties

(12) http://www.alainconnes.org/docs/einsymp.pdf,
http://www.alainconnes.org/docs/maths.pdf,
http://www.alainconnes.org/docs/ramis.pdf

de l'Univers, voire simplement des « relations » entre les constituants, revient logiquement à prétendre atteindre un «rendement» égal à 1 ! Alors qu'en stipulant un inconnaissable mathématisé de base (s'il existe), on peut espérer faire disparaître les contradictions internes analysées dans ce texte, et donner un sens aux absurdités de représentation, comme les points, les ondes continues, les infinis, les singularités comme le Big-Bang, ...

7) Formalisme et mathématique

Rappelons que l'originalité essentielle des mathématiques classiques est de reposer sur la notion d'ensemble, notion finalement banale, surtout si on se limite aux relations de base (union, intersection, . . .) et aux ensembles finis ; on peut même partir de $\emptyset$ comme on l'a vu, et procéder de façon quasi automatique pour obtenir inexorablement des versions intellectuelles très stables des nombres entiers naturels, relatifs, rationnels, algébriques, réels, complexes, puis par des définitions faciles (d'ailleurs empruntées au domaine de la physique et de l'environnement tel qu'il fut perçu au cours des âges) de groupes, d'espaces vectoriels, de topologies, de variétés, etc.

Donc les mathématiques classiques apparaissent comme l'approximation logique fondamentale d'un certain monde physique, situation qui peut expliquer la «fuite en avant» dans laquelle tout problème physique et toute expérimentation plus précise admettent une ou plusieurs «interprétation» provisoirement satisfaisante : la physique newtonnienne très bien traduite dans des espaces vectoriels euclidiens faisant place à la physique einsteinienne à condition de substituer aux espaces euclidiens précédents, les espaces de Minkowski sièges de la relativité restreinte, théorie des cordes en mécanique quantique pour traduire de possibles « dimensions cachés », théorie des boucles gravitationnelles, etc. De même l'existence de plusieurs modèle mathématiques selon l'ordre de grandeur (physique quantique, physique de la vie ordinaire, astrophysique) provient sans doute de cet état de fait qui semble contrarier tout modèle standard de la physique.

Autrement dit, la nature même des mathématiques utilisées classiquement en physique conduit au « syndrome de boîte à chaussures » que nous avons évoqué en introduction et qui « contiendrait » d'une façon ou d'une autre toute théorie physique, ce que les physiciens nomment « une théorie avec fond ». Sauf à admettre l'existence un pré-univers de type $\mathbb{R}$-objet dans lequel tout ne serait pas « connaissable » par l'expérience ou la « réalité », il faudrait en déduire que notre monde est un « sous-ensemble » ou un « quotient » de ce pré-univers nécessairement discret, éventuellement évolutif. Sinon, son existence et sa complexité rationnelle (efficacité considérable des calculs quantiques ou relativistes), relèverait d'un étrange axiome du choix mathématique.

En dépit de leur canonicité au départ, les mathématiques connaissent aussi des problèmes non triviaux (théorèmes d'incertitude de Gödel, utilisation ou non de l'axiome du choix, axiome de l'infini, hypothèse du continu) qui ne concernent pas l'utilisation classique qui en est faite comme outil ; cependant ces problèmes de logique peuvent aussi éclairer le domaine de la physique.

Il est certain que le trouble a depuis longtemps gagné une majorité de scientifiques (par exemple sur la mécanique quantique), mais que toute formalisation demande un long chemin qui de notre point de vue passe par une meilleure analyse du principe de formalisation des mathématique à moins qu'il ne faille tout simplement inventer d'autres formalismes mathématiques. Ce dernier point semble peu raisonnable dans la mesure où les résultats concrets dépendent peu du modèle axiomatique choisi et conduisent inexorablement aux notions de nombres comme fondement principal, même si l'on peut étendre certains aspects logiques comme les « mathématiques non standard » (arithmétique et analyse non standard) qui sont une présentation pouvant être thechniquement plus commode mais qui reste dans le même contexte, notamment de $\mathbb{R}$-objets pour l'analyse non standard.

La différence se situe plutôt au niveau de l'utilisation ou non de l'axiome de l'infini et de l'axiome du choix et certains mathématiciens renoncent à ces axiomes, ce qui conduit à des mathématiques constructives au sens algorithmique du terme ; ceci dit on obtient les même résultats, souvent grâce à des démonstrations nouvelles et intéressantes. Resterait à voir si le monde physique peut y gagner dans la mesure où les questions de cardinalités ne se posent plus et où l'aspect informatique (au sens algorithmique, voire au sens théorie de l'information) n'est pas étranger à certaines visions actuelles de la « réalité » physique.

Il faudrait citer de nombreuses références sur un sujet aussi vaste et en particulier les contributions de Michel Planat ([Pl1], [Pl2], [Pl3], [Pl4] et bien d'autres) sur les interactions manifestes entre phénomènes physiques et théorie des nombres.

Chapitre V

Phénomènes physiques discrets et nombres réels

Les « phénomènes » que nous allons considérer ne sont sans doute pas immédiatement expérimentaux pour un physicien, mais ils sont d'une nature voisine de celle que l'on rencontre dans la catégorie très large des « systèmes dynamiques », dont on sait que le comportement et la stabilité (vus en termes de mathématiques ensemblistes) dépendent de la nature « théorie algébrique des nombres » de certains paramètres (valeurs initiales, constantes du système, etc.).

Ces systèmes dynamiques, comme par exemple celui des n corps en gravitation, sont en principe des $\mathbb{R}$-objets qui s'étudient dans le cadre de l'analyse classique, mais des solutions exceptionnelles existent qui semblent contredire l'aspect « lisse » du problème posé.

De même, les évolutions de type fractales sont des itérations non bornées de fonctions de variables réelles, ou encore les phénomènes de «trajectoires denses» des boules de billard, liées à la nature rationnelle ou non de l'angle d'incidence. Citons aussi la « théorie des catastrophes » de René Thom. [1]

L'aspect chaotique souvent associé à ces systèmes est certes difficile d'accès au plan mathématique et a une existence qui modélise assez bien l'axiome du choix.

Dans tous les cas, ces notions de limites, de singularités, sont de type $\mathbb{R}$-objets, utilisent l'axiome de l'infini, et a priori ne sont pas adaptés intégralement à la physique (sauf dans le domaine macroscopique) et ont abusé l'esprit lorsqu'il s'agit d'étudier les aspects limites (« infiniment » petits ou grands en mécanique quantique ou théorie de l'Univers).

Or ici nous considérons des systèmes discrets (les variables seront des entiers) et même potentiellement finis, et c'est en ce sens que nous les

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/rene-thom, par David Aubin.

assimilons à des phénomènes de physique. Reste toutefois à définir des expériences effectives réalisant ce contexte. De plus, et contrairement aux exemples précédents « non linéaires », nous allons avoir le système dynamique linéaire le plus élémentaire.

Il s'agit tout simplement d'étudier les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de nombres ou vecteurs donnés ; difficile de faire plus simple !

Le problème existe en toutes dimensions et est élucidé, pour l'aspect mathématique, au moyen du théorème de dualité diophantienne de Kronecker (voir Chapitre VI). La dimension 1 peut se traiter de façon plus élémentaire et est très connue.

1) Cas de la dimension 1.

On suppose que α et β sont des grandeurs physiques de même nature, fixées, et qui interviennent de la façon suivante :

On considère les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des nombres α et β, combinaisons de la forme :

$$A\,\alpha + B\,\beta, \quad A, B \in \mathbb{Z},$$

supposées définir des « états physiques » qui constituent l'objet concret étudié. On suppose en outre que les aspects additifs et multiplicatifs sont exacts ; autrement dit, les entiers A, B n'apportent aucune imprécision mais indiquent des répétitions ou des «superpositions» (algébriques) d'un certain nombre de fois α et d'un certain nombre de fois β, ce que l'on devrait écrire :

$$\alpha+\alpha+\cdots+\alpha+\beta+\beta+\cdots+\beta, \quad \text{en un sens évident pour l'opération } +.$$

Cet ensemble :

$$G := \{A\,\alpha + B\,\beta, \quad A, B \in \mathbb{Z}\},$$

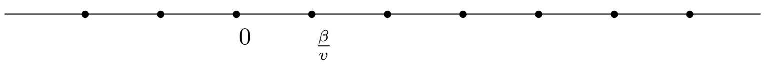
est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On peut voir cet ensemble de points sur la droite réelle, comme support visuel, mais elle n'intervient pas en tant que telle, surtout dans une expérience.

Le fait que G soit infini n'entre pas en jeu car on ne considèrera qu'un nombre fini (assez grand quand même) d'éléments de G. On a alors le raisonnement suivant :

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est un rationnel $\frac{u}{v}$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $v \neq 0$, alors les combinaisons linéaires sont de la forme

$$A\,\alpha + B\,\beta = A\,\beta\,\frac{u}{v} + B\,\beta = \beta\left(A\,\frac{u}{v} + B\right) = \beta\,\frac{A\,u + B\,v}{v}, \quad \text{pour } A, B \in \mathbb{Z}.$$

Supposant u et v pris premiers entre eux, il est bien connu que $A\,u + B\,v$ peut prendre toute valeur entière (car 1 est atteint, c'est la relation de Bézout), ce qui montre que l'on a $G = \frac{\beta}{v}\,\mathbb{Z}$, qui est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ de maille (plus petite distance entre deux points de G) $\frac{\beta}{v} = \frac{\alpha}{u}$, d'autant plus petite que les nombres u et v sont grands :



Si $\frac{\alpha}{\beta}$ n'est pas rationnel, alors G est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, d'après la théorie du développement en fraction continue[2] (voir aussi [Gr], Ch. XXIV, § 3, ou [HW], Ch. X), si $\frac{\alpha}{\beta}$ est irrationnel il existe une infinité de rationnels, que l'on écrit ici $\frac{-B_i}{A_i}$ $(A_i, B_i \in \mathbb{Z})$, tels que :

$$\left|\,\frac{\alpha}{\beta} - \frac{-B_i}{A_i}\,\right| < \frac{1}{A_i^2}.$$

On a donc facilement :

$$|\,A_i\,\alpha + B_i\,\beta\,| < \frac{\beta}{A_i}.$$

Comme A_i tend vers l'infini avec i, $g_i := A_i\,\alpha + B_i\,\beta$ est dans G et arbitrairement petit, ce qui suffit pour avoir la densité en utilisant les inclusions $g_i\,\mathbb{Z} \subset G$ pour tout i.

Remark 1. Le cas de n nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $n > 2$, se ramène essentiellement au cas $n = 2$ car si les rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$ sont tous rationnels on obtient facilement un sous groupe discret, sinon dès qu'un seul rapport est irrationnel, le groupe G contient un sous groupe dense, donc est lui-même dense.

Prenons par exemple $\beta = 1$ et $\alpha = \sqrt{2}$. Un dispositif physique sera par exemple un système de deux segments OX, OY perpendiculaires de longueur unité, auquel cas la distance XY vaut $\sqrt{2}$ unités. On suppose la mise au point d'une expérience qui superpose *algébriquement* les deux grandeurs ad libitum. Le fait de pouvoir ajouter et/ou retrancher est essentiel pour évoluer dans un domaine physique borné (autour de 0 par exemple) seul cadre dans lequel des phénomènes intéressants peuvent être observés.

---
(2) http://www.universalis.fr/encyclopedie/approximations-diophantiennes, par Marcel David.

Sur un plan expérimental, personne ne peut assurer que c'est le $\sqrt{2}$ mathématique qui est utilisé (sans parler de la notion d'orthogonalité pour le créer !), mais ou bien une approximation fixe, ou bien une quantité fluctuante ou indéterminée, très proche, ce qui pose énormément de problèmes ; appelons α' cette « interprétation » de $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha = \sqrt{2}$ et G' le résultat.

On a plusieurs cas :

(i) α est traité comme étant $\alpha' = 1.4142$, auquel cas c'est un rationnel et G' est discret : le générateur positif g'_0 de G' est 5×10^{-3} (cas du rationnel $\frac{14142}{10000} = \frac{7071}{5000}$).
Pour l'approximation rationnelle $\alpha' = \frac{99}{70}$ (on a $(\frac{99}{70})^2 = 2.00020\ldots$), on obtient $g'_0 = \frac{1}{70}$ nettement plus grand.
On doit alors constater expérimentalement que l'on ne se rapproche pas arbitrairement de 0.

(ii) α est « par hasard » remplacé par un nombre irrationnel α' a priori distinct de $\sqrt{2}$ mais très proche, alors G' est dense dans $\mathbb{R}$ et on peut s'approcher arbitrairement de 0 sans l'atteindre (ici les deux « nombres » α et α' jouent le même rôle).

(iii) α' est « indéterminé au sens de la mécanique quantique », autour de $\sqrt{2}$, et alors la nature même de G est indéterminée de sorte que l'on ignore si l'on peut se rapprocher arbitrairement de 0 ou non. Expérimentalement et statistiquement on devrait aussi s'approcher arbitrairement de 0 sans pour autant avoir une idée de α'.

Mais quel sens donner mathématiquement à la notion d'indétermination au sens de la mécanique quantique autre que probabiliste ?

Voir Chapitre VII pour une possible interprétation mathématique.

(iv) α' est « fluctuant », ce qui introduit une dimension temporelle et un contexte probablement quantifié car on voit mal α' être fonction du temps de façon « continue » (au sens de continuum plus qu'au sens topologique).

Dans tous les cas l'idée d'une quantification généralisée (évoquée au § 3)) conduirait systématiquement à des groupes G' rationnels de mailles en rapport avec la constante de Planck. Voir § 4) pour les bases expérimentales d'une possible vérification dans l'esprit de celle envisagée dans [Mo].

C'est là que l'on voit ou bien l'inadéquation du formalisme mathématique (qui passe sans transition des rationnels aux irrationnels) ou bien l'absurdité logique de l'idée d'indétermination, d'incertitude ou de fluctuation. Que dire également d'un espace continu (continuum) tel que suggéré par David Tong (§ 3)) ?

Ajoutons qu'il n'y a pas plus de notion de probabilité dans ces questions [3] car au plan théorie de la mesure dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des rationnels situés dans un voisinage de α est de mesure nulle, contrairement à celui des irrationnels (par « tirage au sort », un nombre est transcendant avec la probabilité 1).

Quant à la nature de G' en fonction de celle de α', on ne peut pas parler de résultat approché de G car cette nature est d'une discontinuité indéfinissable : quel que soit l'intervalle $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$ aussi petit que l'on veut où l'on prend α', la nature de G' varie une infinité de fois, étant entendu que G' est presque tout le temps dense.

Notons que pour deux irrationnels α_1, α_2 distincts (proches ou non) tels que 1, α_1, et α_2 soient $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants (comme par exemple 1, $\sqrt{2}$, et $\sqrt{3}$) [4], les groupes correspondants

$$G_1 = \{A\,\alpha_1 + B,\ \ A, B \in \mathbb{Z}\} \text{ et } G_2 = \{A\,\alpha_2 + B,\ \ A, B \in \mathbb{Z}\},$$

sont chacun denses mais n'ont que $\mathbb{Z}$ en commun.

A contrario, la même expérience doit être faite avec deux quantités égales ($\beta = \alpha$) ou en rapport rationnel afin de tester les points (i) à (iv) précédents pour voir si une dérive s'opère quand même.

Nous avons traité le cas de G ou G' considérés comme « ensembles achevés » (donc infinis), or en pratique (ainsi que pour une expérience de physique), on doit donner des valeurs successives à A et B, ce qui induit manifestement d'autres phénomènes liés à une notion de « remplissage » (voir § 2)).

2) Cas de la dimension 2.

La situation est beaucoup plus riche et on va se limiter à une famille particulière. On suppose toujours $\alpha \neq 0$ et on considère les combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des vecteurs

$$(1, 0),\ (0, \alpha), \text{ et } (\alpha, \alpha^{-1}).$$

Au point de vue mathématique, G est un sous-groupe de $\mathbb{R}^2$ qui est déjà un objet assez pernicieux puisque l'adhérence $\overline{G}$ de G dans $\mathbb{R}^2$ (i.e., ce

(3) Voir [De5] pour l'analyse de telles notions vs la notion classique de probabilité qui est d'une autre nature et ne traduit pas la notion d'indétermination.

(4) Si pour des rationnels r, s, t on a $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$ alors $s\sqrt{2} + t\sqrt{3}$ est rationnel, donc $(s\sqrt{2} + t\sqrt{3})^2 = 2\,s^2 + 3\,t^2 + 2st\sqrt{6}$ rationnel, qui conduit à $\sqrt{6}$ rationnel (absurde sauf si $s\,t = 0$). Mais si par exemple $t = 0$, on obtient immédiatement $s\sqrt{2}$ rationnel d'où $s = 0$.

que l'on voit géométriquement) peut prendre a priori toute structure de sous-groupe fermé (un résultat facile renseigne à ce sujet, cf. Théorème 33). La bonne structure est donnée par l'application du théorème de dualité diophantienne de Kronecker (voir Chapitre VI) ; ici trois cas sont possibles, à savoir :

$$\overline{G} = \mathbb{R}^2, \ \ \overline{G} = (a,b)\,\mathbb{R} \bigoplus (c,d)\,\mathbb{Z}, \text{ ou } \ \overline{G} = G = (a,b)\,\mathbb{Z} \bigoplus (c,d)\,\mathbb{Z}.$$

Dans le premier cas, G est partout dense, dans le second $\overline{G}$ est la somme directe d'une droite réelle (où s'accumulent de façon dense des points de G) et d'un sous-groupe discret porté par une droite réelle, et dans le dernier on a la somme directe de deux sous-groupes discrets, chacun porté par une droite réelle ; un tel groupe est appelé un réseau de $\mathbb{R}^2$ (cf. Définition 1), le réseau le plus simple étant :

$$\mathbb{Z}^2 = (1,0)\,\mathbb{Z} \bigoplus (0,1)\,\mathbb{Z}.$$

Ce fait, étonnant en un sens, dépend, comme en dimension 1, de la nature diophantienne de α et non de son ordre de grandeur, et montre la difficulté d'interprêter un phénomène physique a priori banal avec les mathématiques classiques (nous allons le repréciser à l'aide d'un exemple numérique), sauf à y trouver un type d'explications à des comportements non classiques.

Il serait intéressant de trouver une situation quantique permetant de monter une expérience de visualisation de ce qui se passe en fonction de la « stabilité » de α au sens précédent vu en dimension 1.

De fait on va voir que la situation est pire que ce qu'on imagine pour cet exemple précis. Voir le Chapitre VI où l'on montre que si α n'est pas racine d'une équation de degré inférieur ou égal à 3, à coefficients entiers, alors G est dense dans $\mathbb{R}^2$ (premier cas évoqué ci-dessus).

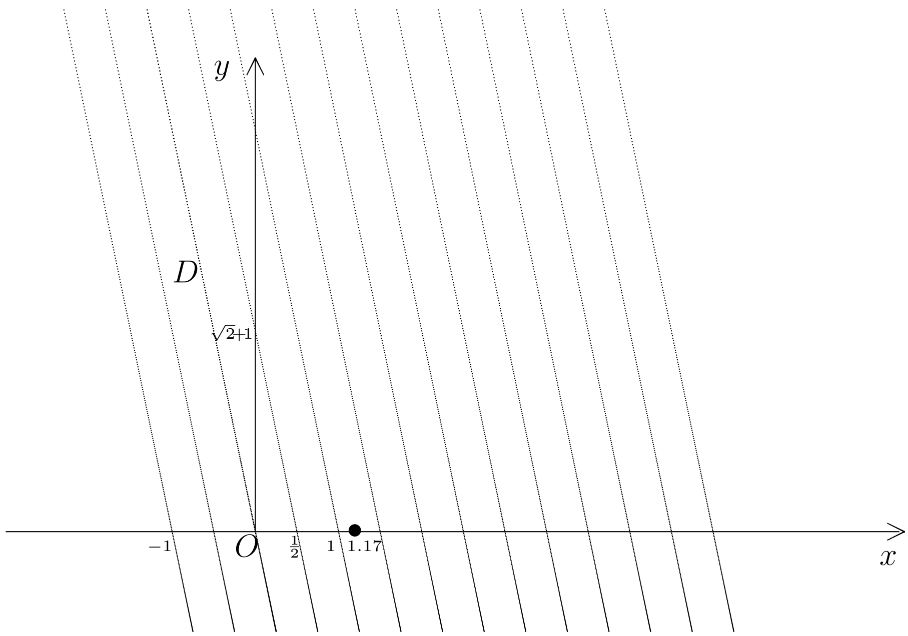
Nous allons alors prendre la valeur singulière $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ (racine de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$) et allons comparer le résultat théorique avec tout résultat « physique », à savoir lorsqu'on suppose que la « valeur » α' de α est rationnelle, irrationnelle, approchée, indéterminée, ou fluctuante, comme dans l'exemple vu en dimension 1.

La détermination de $\overline{G}$ au moyen du théorème de dualité diophantienne de Kronecker est systématique, effective, mais assez subtile. On trouve alors :

$$\begin{aligned}\overline{G} &= \Big(\tfrac{1}{2}, -(1+\sqrt{2}\,)\Big)\,\mathbb{R} \ \bigoplus \ \Big(0, 1+\sqrt{2}\Big)\,\mathbb{Z} \\ &= \Big(\tfrac{1}{2}, -(1+\sqrt{2}\,)\Big)\,\mathbb{R} \ \bigoplus \ \Big(\tfrac{1}{2}, 0\Big)\,\mathbb{Z},\end{aligned}$$

somme directe d'une droite réelle D passant par O, où s'accumulent uniformément des points de G, et du groupe discret des multiples entiers de $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

On obtient, le schéma suivant :



Notons que si l'interprétation α' de α est rationnelle (donc racine d'une équation du premier degré), le résultat G' est discret (c'est alors un réseau de $\mathbb{R}^2$) ; plus précisément, si $\alpha' = \frac{a}{b}$, avec a et b premiers entre eux, alors

$$G' = \overline{G'} = \left(\frac{1}{b}, 0\right)\mathbb{Z} \bigoplus \left(0, \frac{1}{a\,b}\right)\mathbb{Z}.$$

Autrement dit, si $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ est remplacé par la valeur approchée $\alpha' = \frac{985}{408}$ (on a $(\frac{985}{408} - 1)^2 = 2.000006007304883\ldots$), on obtient pour G', non pas le dessin ci-dessus, mais un réseau de très petite maille engendré sur $\mathbb{Z}$ par les vecteurs $\left(\frac{1}{408}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{1}{401880}\right)$. De fait plus le rationnel α' approche α plus le réseau G' est fin sans jamais être un sous-groupe dense.

On voit déjà l'instabilité du résultat théorique en fonction de la nature de l'approximation de $1 + \sqrt{2}$, mais il y a pire si l'on considère que l'expérience physique consiste à créer, lorsque A, B, C sont des entiers donnés, les combinaisons

$$A\,(1,0) + B\,(0,\alpha) + C\,(\alpha, \alpha^{-1}) = (A + C\,\alpha, B\,\alpha + C\,\alpha^{-1}),$$

car la façon dont se « remplit » G, lorsque A, B, C varient, est assez cahotique en fonction de ce que l'on entend par $1+\sqrt{2}$. Comme pour le cas de dimension 1, on procède de façon algébrique pour rester dans un voisinage de dimension 2 de l'origine.

Supposons encore que $\alpha' = \frac{985}{408}$ et prenons $A = 401886$, $B = 28561$, et $C = -166466$ (B et C sont des coefficients d'une relation de Bézout entre 985^2 et 408^2 premiers entre eux) ; ceci définit le point aberrant de G' (point noir de la figure) :

$$\Big(A + C\,\frac{985}{408}, B\,\frac{985}{408} + C\,\frac{408}{985}\Big) = (1.171568, 2.488305 \times 10^{-6}),$$

sachant que les points de G sur l'axe Ox les plus proches sont $(0, 0)$ et $(2.414213, 0)$.

Autrement dit, les propriétés diophantiennes de α et/ou de ses approximations et/ou fluctuations interviennent de façon non standard comme en dimension 1, mais ici de façon encore plus spectaculaire.

Par exemple, le nombre $\alpha' = 0.768468 \times \pi = 2.41421342331\ldots$, très proche de $1+\sqrt{2}$, ne peut donner au plan théorique qu'un sous-groupe partout dense puisque $0.768468 \times \pi$ est transcendant. Mais dans le cadre d'un montage physique, on peut imaginer qu'il y a de fait comme un « nuage » de valeurs possibles de α' prenant toute caractéristique diophantienne, et on aimerait savoir ce qui peut en résulter dans un contexte quantique, donc différent d'un continuum (si c'est le cas).

Remark 2. On peu, par ordinateur, tracer un grand nombre de points en calculant les coordonnées et alors le résultat est sans mystère : le résultat est du type G' avec α' rationnel dépendant de l'approximation choisie. Il n'est en aucun cas possible de simuler une autre situation, mais selon l'approximation rationnelle, on peut avoir de grandes différences de comportement (cas du point aberrant trouvé ci-dessus).

Par contre on peut se demander ce que donnerait un ordinateur analogique très précis.

De plus, dire que α' prend peut-être des valeurs rationnelles/irrationnelles est probablement stupide eu égard au fait que l'on rentre alors dans la catégorie des $\mathbb{R}$-objets ; cela tendrait à prouver que l'espace de ces valeurs α' est discret (ou plutôt quantifié, c'est-à-dire de la forme $s\,q$, $s \in \mathbb{Z}$, q étant une mystérieuse constante de l'Univers, attachée ou non à celle de Planck).

3) Processus de remplissage de G sous condition d'incertitude quantique.

Toute expérience de physique testant l'aspect diophantien du théorème de Kronecker suppose que les coefficients entiers utilisés sont bornés a priori mais assez grands. Prenons par exemple, le cas de la dimension 1 avec les nombres α et β donnés. On suppose donc que l'expérience en jeu définit des grandeurs physiques α et β telles que $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}$ par application mathématique usuelle des lois du système.

On peut prendre β comme unité de base, auquel cas $\alpha = \sqrt{2}$ unités ; on est donc dans le cadre de l'analyse classique portant sur des $\mathbb{R}$-objets (distances, forces, tensions, masses, etc.), comme par exemple la distance entre les points de base $(1, 0)$ et $(0, 1)$ fixés dans deux directions perpendiculaires.

On a $G = \{A\,\alpha + B\}$, $A, B \in \mathbb{Z}$ et une façon simple d'étudier le phénomène est de faire varier $A \geq 0$ et de prendre pour B l'opposé de la partie entière de $A\,\alpha$ (vu comme superposition de A fois le «phénomène» $\alpha = \sqrt{2}$ ou ses fluctuations α'). Pour atteindre de grands A, on peut penser à un grand nombre de réflexions d'un laser entre deux miroirs parallèles distants de $\sqrt{2}$, pendant un temps T_A calculé de telle sorte que, théoriquement, la lumière se soit réfléchie A fois, ce qui donne $T_A = A\,\frac{\sqrt{2}}{c} = A\,\frac{\sqrt{2}}{299792458}$ secondes. L'idée est alors de lire les éventuelles fluctuations sur le temps réel T'_A.

Mais il est préférable de laisser aux physiciens le soin de définir une expérience réaliste !

4) Le point de vue des physiciens Quelles mathématiques proposer ?

Dans les textes de Lee Smolin § 1) et de Michæl Moyer § 2), est abordé la nature du monde. Par exemple, dans celui de Michæl Moyer [Mo], on pouvait lire :

Le monde est-il flou ? Ce n'est pas une métaphore. Pour Craig Hogan, physicien des particules à l'Université de Chicago et directeur du Centre d'astroparticules du Fermilab, dans l'Illinois, si nous parvenions à observer les plus petites subdivisions de l'espace et du temps, nous découvririons un univers en perpétuelle effervescence, un incessant bourdonnement de fluctuations.

Cette agitation n'est pas celle de particules qui apparaissent et disparaissent, ni d'autres types de « mousses quantiques » imaginés jusqu'ici. Ce bruit serait la marque d'un espace discontinu qui, au lieu d'être une toile de fond bien lisse à la danse des particules, serait au contraire constitué de petits morceaux irréductibles : un univers discret.

A la plus petite échelle possible, l'échelle de Planck ($6,62606957 \,.\, 10^{-34}$ *mètre), les deux piliers de la physique du XXe siècle, la théorie quantique et la relativité générale, semblent irréconciliables.*

COMMENTAIRE 30 : **Il est clair que les outils mathématiques utilisés dans les deux cas (quantique et macroscopique) sont suffisamment spécifiques pour ne pas être compatibles pour les raisons suivantes déjà évoquées :**

(i) Le cas quantique est décrit d'une part par de l'analyse classique ($\mathbb{R}$-objets du modèle standard) munie d'un certain nombre de concepts (indétermination quantique), qui ne reflète pas le caractère probablement discret de l'Univers ;

(ii) Le cadre macroscopique et même « non borné » de l'astrophysique (relativité générale) peut apparaître comme une *globalisation de phénomnes locaux* **pour laquelle il n'est alors pas étonnant que l'analyse réelle apparaisse comme satisfaisante même si elle reste entachée d'une imprécision d'un ordre imperceptible.**

Ce passage du local au global a en mathématique un sens profond qui peut paraître assez différent ; il est classique en géométrie et théorie des nombres et peut suggérer une approche technique en termes de physique théorique sous certaines conditions assez scabreuses (pour la physique). En particulier, on suppose implicitement que les métriques « non naturelles » ont un sens en physique ; ces métriques, d'abord définies sur $\mathbb{Q}$, ont été évoquées au § 2) et sont dites ultramétriques en raison de leur propriétés particulières. $\square$

a) Formule du produit pour les métriques de $\mathbb{Q}$

Pour un nombre premier p fixé, on pose pour $x, y \in \mathbb{Q}$, $d_p(x,y) := \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{val}_p(y-x)}$, où $\mathrm{val}_p(y-x)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de $y-x$ (le cas $y=x$ donnant une valuation infinie et donc $d_p(x,y)=0$; on a $d_p(x,y)=0$ si et seulement si $y=x$).

On peut remplacer $\frac{1}{p}$ par n'importe quelle constante comprise strictement entre 0 et 1 et on obtient la même topologie, mais cette normalisation va se révéler utile. On rappelle aussi que l'on peut d'abord définir la notion de valeurs absolues p-adiques au lieu de distances ou métriques p-adiques en posant $|x|_p := \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{val}_p(x)}$ puis $d_p(x,y) := |y-x|_p$. Le théorème d'Ostrowski (cf. § 26) donnant toutes les valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$.

Cette métrique a les propriétés suivantes :

(i) La fonction $\mathrm{val}_p(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, ayant pour image $\mathbb{Z}$, les valeurs $|x|_p = d_p(x,0)$ constituent un ensemble discret infini de la forme $\left\{\ldots, \left(\frac{1}{p}\right)^n, \ldots, \left(\frac{1}{p}\right)^2, \frac{1}{p}, 1, p, p^2, \ldots, p^n, \ldots\right\}$.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{Q}$, on a

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(y,z))$$

et

$$d_p(x,y) = \max(d_p(x,z), d_p(y,z)) \text{ si } d_p(x,z) \neq d_p(y,z)$$

(ce qui définit la propriété d'ultramétricité qui implique l'inégalité triangulaire habituelle $d_p(x,y) \leq d_p(x,z) + d_p(y,z)$). Cette propriété vient de la relation arithmétique

$$\mathrm{val}_p(x+y) \geq \min(\mathrm{val}_p(x), \mathrm{val}_p(y)) \text{ avec égalité lorsque } \mathrm{val}_p(x) \neq \mathrm{val}_p(y).$$

(iii) On a la propriété « non naturelle » suivante : si $B_a = \{x \in \mathbb{Q},\ d_p(x,a) < \varepsilon\}$ est une boule ouverte de centre a et si $B_b = \{y \in \mathbb{Q},\ d_p(y,b) < \eta\}$ est une boule ouverte de centre b, alors ou bien B_a et B_b sont disjointes, ou bien l'une d'elle est contenue dans l'autre. Notons qu'il est plus commode en vertu de (i) d'écrire qu'il existe des entiers $e, f \in \mathbb{Z}$ tels que

$$B_a = \{x \in \mathbb{Q},\ \mathrm{val}_p(x-a) > e\}, \quad B_b = \{y \in \mathbb{Q},\ \mathrm{val}_p(y-b) > f\}.$$

En effet, supposons que B_a et B_b ont une intersection non vide : il existe donc $c \in B_a \cap B_b$. On a alors $d_p(c,a) < \varepsilon$ et $d_p(c,b) < \eta$, d'où $d_p(a,b) \leq \max(d_p(a,c), d_p(b,c)) = \eta$ (en supposant par exemple $\varepsilon \leq \eta$) ; d'où $a \in B_b$.

Si maintenant $x \in B_a$, on a $d_p(x,b) \leq \max(d_p(x,a), d_p(a,b)) \leq \eta$ qui prouve que $x \in B_b$, donc que $B_a \subseteq B_b$.

Ceci étant, une première propriété de l'ensemble des métriques d_p, auxquelles on a rajouté la métrique usuelle d_∞, est la « formule du produit » qui s'énnonce :

Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, x non nul, on a la relation $|x|_\infty \,.\, \prod_{p \text{ premier}} |x|_p = 1$.

Bien que donnant déjà une relation de dépendance non triviale entre des métriques définissant pourtant des topologies non équivalentes, cette relation est évidente à partir de la relation :

$$x = \pm \prod_{p \text{ premier}} p^{\mathrm{val}_p(x)}$$

qui s'écrit encore :

$$d_\infty(x,0)^{-1} = \prod_{p \text{ premier}} \left(\frac{1}{p}\right)^{\mathrm{val}_p(x)} = \prod_{p \text{ premier}} d_p(x,0),$$

ce qui conduit au résultat. La métrique usuelle sur $\mathbb{Q}$ s'exprime en fonction des distances ultramétriques p-adiques.

Ce résultat (ainsi que le théorème d'Ostrowski) admet de nombreuses généralisations à des corps autres que $\mathbb{Q}$: les corps globaux qui sont les corps extensions finies du corps $\mathbb{Q}$ (comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2},\ a,b \in \mathbb{Q}\}$) et les corps de fonction d'une courbe algébrique sur un corps fini c'est-à-dire les extensions finies du corps $k(T)$ des fractions rationnelles à une variable T, à coefficients dans un corps fini k (comme $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Cette seconde catégorie est de nature «géométrique», sans doute aussi utilisable comme modèle en physique théorique.

On prendra garde aux questions d'approximation diophantienne et de continuité (au sens topologique) dans ce cadre ; par exemple pour revenir aux calculs du § 2), si $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ est remplacé par la valeur approchée $\alpha' = \frac{985}{408}$, on a

$$|1+\sqrt{2}|_\infty = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{985}{408}\right|_\infty = \frac{985}{408} = 2^{-3}3^{-1}.\,5\,.\,17^{-1}\,.\,197$$

qui signifie que $1 + \sqrt{2}$ est approché par

$$|\alpha'|_2^3 \,.\, |\alpha'|_3 \,.\, |\alpha'|_5^{-1} \,.\, |\alpha'|_{17} \,.\, |\alpha'|_{197}^{-1},$$

mais pour $\alpha\text{»} = \frac{14142}{10000}$ on trouve la combinaison

$$|\alpha\text{»}|_2^3 \,.\, |\alpha\text{»}|_3^{-1} \,.\, |\alpha\text{»}|_5^4 \,.\, |\alpha\text{»}|_{2357}^{-1},$$

sans rapport avec la précédente.

Commentaire 31 : **Toute interprétation physique d'un Univers « flou » dans ce cadre rationnel suppose a priori que toutes les grandeurs physiques floues sont en rapports rationnels entre**

elles (le 1 de $\mathbb{Q}$ devenant le « quantum » de base q dans cette représentation). Les notions géométriques ne sont alors plus cartésiennes et par exemple, la diagonale d'un carré de côté $n\,q$ ($n \in \mathbb{N}$ grand) est une approximation convenable de $n\sqrt{2}\,q$ (mais parler d'angle droit est aussi mal défini, de même pour l'égalité de deux côtés); c'est la situation envisagée au § 1). Mais le résultat est satisfaisant dans ce cadre macroscopique.

Dans le cas où n est petit ($n = 1$ par exemple), les notions même de carrés (angles, directions, etc.) sont manifestement non définies et $\sqrt{2}\,q$ est probablement un simple quantum égal à q ou $2q$. Autrement dit, le flou quantique ci-dessus doit (grâce à des règles inconnues) se régulariser lorsqu'on passe du domaine des quanta au domaine macroscopique, faisant passer d'une géométrie « non $\mathbb{R}$-objet » à une géométrie « quasi $\mathbb{R}$-objet » (qui peut tout à fait faire illusion avec l'espace-temps d'Einstein). Ceci peut en outre justifier des comportements non classiques comme le spin des particules. □

b) Principe local–global en théorie des nombres

Tout ce qui précède n'est qu'un premier stade élémentaire comparé au profond « principe local–global », surtout significatif au plan mathématique, mais sait-on jamais.

Au vocabulaire près que nous allons préciser, ce principe s'énnonce ainsi logiquement :

La propriété $\mathcal{P}$ est vraie globalement (c'est-à-dire dans le corps $\mathbb{Q}$) si et seulement si elle est vraie localement (c'est-à-dire dans tous le corps $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$).

Ce principe n'est pas toujours vrai et dans le cas où il n'est pas vérifié, il existe en général un invariant (souvent un groupe fini) qui caractérise le «défaut». Le plus souvent il existe une «formule du produit» qui permet de remplacer *tous les complétés de* $\mathbb{Q}$ par *tous les complétés de* $\mathbb{Q}$ *sauf un quelconque.*

Le sens « vrai globalement implique vrai localement » est immédiat par nature. Commençons par des exemples triviaux sur $\mathbb{Q}$:

(i) Un nombre rationnel ρ est entier si et seulement si il est entier dans tous les complétés de $\mathbb{Q}$[5] ; en effet, si ρ est dans $\mathbb{Z}_p$ pour tout p, il vient $\mathrm{val}_p(\rho) \geq 0$ pour tout p, d'où $\rho \in \mathbb{Z}$. La réciproque est évidente.

(ii) Un nombre rationnel $\rho \neq 0$ est un carré de rationnel si et seulement si il est un carré dans dans tous les complétés de $\mathbb{Q}$; si on utilise les complétés autres que $\mathbb{R}$, on obtient que toutes les valuations de ρ sont paires, ce qui donne $\rho = \pm\psi^2$, $\psi \in \mathbb{Q}$, mais dire que ρ est un carré dans $\mathbb{R}$, c'est dire qu'il est positif.

Donnons ensuite un exemple non trivial en théorie des nombres pour montrer que la différence des techniques qui interviennent existe aussi dans ce cadre (mathématique discrète vs analyse réelle) :

(iii) Considérons la forme quadratique $f(X, Y, Z) = a\,X^2 + b\,Y^2 + c\,Z^2$ où a, b, c sont des rationnels non nuls (ou des entiers non nuls, ce qui revient au même) et où X, Y, Z sont des variables non précisées ; on dit que cette forme représente 0 dans un corps K s'il existe $x, y, z \in K$, non tous nuls, telles que $f(x, y, z) = 0$.

Alors le célèbre théorème de Hasse–Minkowski dit que cette forme représente 0 dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si elle représente 0 dans tous les complétés de $\mathbb{Q}$ sauf un (on choisira d'omettre $\mathbb{R}$).

Or, vérifier que la forme a une solution non triviale dans $\mathbb{Q}_p$ est facile et se ramène à une vérification modulo p pour $p \neq 2$ et modulo 8 pour $p = 2$. Plus précisement on se ramène au calcul de symboles de restes quadratiques, et ceci n'est nécessaire que pour un nombre fini explicite de premiers p (ceux qui divisent $2abc$).

Le plus spectaculaire est alors que si les tests sur ces nombres premiers p sont positifs, il en résulte que la forme représente 0 sur $\mathbb{R}$, ce qui est équivalent à a, b, c non tous du même signe (sinon on a une forme équivalente à $X^2 + Y^2 + Z^2$ qui ne représente pas 0 dans $\mathbb{R}$). Bien sûr on peut s'en apercevoir immédiatement, mais le lien entre les métriques sur $\mathbb{Q}$ est ici tout à fait non trivial et ne provient pas de la relation :

$$|x|_\infty \,.\prod_{p\,\text{premier}} |x|_p = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{Q}^\times,$$

en dépit des apparences.

Elle vient aussi d'une « formule du produit » sur des symboles de restes quadratiques, équivalente à la loi de réciprocité quadratique de Gauss ; dans un cadre très général une « formule du produit » existe et résulte de la difficile « théorie du corps de classes ».

(5) Par définition, un entier de $\mathbb{Q}_p$ est un élément de $\mathbb{Z}_p$ (cf. § 6)). Les entiers de $\mathbb{R}$ sont les éléments de $\mathbb{Z}$.

Par exemple on peut montrer assez facilement que la forme $X^2+Y^2+Z^2$ représente 0 dans $\mathbb{Q}_p$ pour tout $p \neq 2$; pour $p = 2$ on recherche des nombres 2-adiques x, y, z entiers non tous divisibles par 2 (par exemple x, y impairs, z pair) et comme tout carré de nombre impair est congru à 1 modulo 8, on voit que $x^2+y^2+z^2$ ne peut s'annuler modulo 8. D'après l'énoncé du principe, il doit exister une autre complétion dans laquelle la forme ne représente pas 0 : c'est evidemment $\mathbb{R}$.

Si l'on considère la forme $2\,X^2 - Y^2 + 17\,Z^2$, on peut vérifier qu'elle représente 0 dans $\mathbb{Q}_{17}$ et $\mathbb{R}$ (ce qui suffit pour affirmer qu'elle représente 0 dans $\mathbb{Q}$ sans pour autant connaître une solution, même s'il est facile d'en trouver a posteriori).

c) Conclusion

Dans la suite de l'article [Mo] de Michæl Moyer, « L'espace-temps est un sous-produit des quanta d'information », on lit :

C'est à cette même échelle [l'échelle de Planck] *que des physiciens ont développé depuis quelques décennies une description de l'Univers en termes d'information, c'est-à-dire de bits : des 0 et des 1. Selon cette théorie dite holographique, c'est l'information, et non pas la matière et l'énergie, qui constitue l'essence même de l'Univers. De cette information émerge le cosmos (...).*

Plus précisément, dans cet espace-temps quantique émergent, la position d'un objet n'est pas précisément définie. Il ne s'agit pas d'une incertitude quantique usuelle, selon laquelle on ne peut connaître simultanément la position et la vitesse exactes d'une particule, mais d'une incertitude intrinsèque : la notion classique de point, avec des coordonnées bien définies, n'a pas de sens.

COMMENTAIRE 32 : **On ne saurait mieux dire que les $\mathbb{R}$-objets n'ont pas de sens en physique et que les outils mathématiques évoqués dans les paragraphes précédentes peuvent suggérer de nouveaux modèles.**

Cependant certaines expressions comme : *un espace discontinu qui, au lieu d'être une toile de fond bien lisse à la danse des particules, serait au contraire constitué de petits morceaux irréductibles : un Univers discret*, **laissent perplexes car elles repoussent plus loin l'iée de matérialité, telle que nous la ressentons, sans apporter de solution satisfaisante.**

On peut se demander si le monde physique dans ses fondements est « connaissable » en ce sens et si on ne doit pas se contenter

d'une axiomatisation susceptible d'être alors mathématisée avec les outils propres aux mathématiques. Ceci veut dire que les grands principes découverts pour les mathématiques ont peut-être été «empruntés» par la nature parce que celle-ci est repose sur des principes logiques et que les conséquences de la logique (c'est-à-dire les mathématiques) sont un passage obligé.

L'aspect théorie de l'information est séduisant et va dans ce sens sous réserve de plus de précisions. □

Chapitre VI

Théorème de dualité diophantienne de Kronecker

Le contexte est d'une extrême simplicité puisqu'il s'agit d'analyser le phénomène d'addition dans ce qui (au moins autrefois) représentait le « fond », de type $\mathbb{R}$-objet, propre aux raisonnements classiques en physique : additions répétées de nombres, de vecteurs, ou grandeurs diverses données. Autrement dit, il s'agit de se placer dans des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}^n$ comme les droites, plans, ou les réseaux de $\mathbb{R}^n$ (le plus simple étant $\mathbb{Z}^n$, ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières).

On rappelle qu'un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$ (pour la métrique usuelle) est un groupe G dans lequel toute suite convergente (a priori dans $\mathbb{R}^n$) a sa limite dans G ; bien sûr cet aspect est, comme toujours, une illustration du phénomène «$\mathbb{R}$-objet» dont on a vu la quasi-absurdité physique au § c) concernant les suites de Cauchy, et l'idée est de susciter une confrontation des deux réalités au moyen du peu connu théorème diophantien de Kronecker.

Les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont fermés, et de même les réseaux comme $\mathbb{Z}^n$ qui n'est pas un espace vectoriel mais un $\mathbb{Z}$-module (la multiplication scalaire a lieu avec des entiers et non des réels).

Un sous-groupe G de $\mathbb{R}^n$ est dit discret (au sens topologique) si tout point g de G est isolé (i.e., on peut trouver une boule B de rayon r non nul, de centre g, telle que $B \cap G = \{g\}$. Un tel groupe est fermé car ses seules suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ sont les suites constantes à partir d'un certain rang i_0 ($x_i = g \in G$ pour tout $i \geq i_0$) ; c'est le cas des réseaux comme $\mathbb{Z}^n$.

Aussi il est naturel de dire un mot des sous-groupes plus généraux, a priori non fermés, obtenus précisement en accumulant des additions (de vecteurs ou points de $\mathbb{R}^n$ par exemple). Auparavant on est obligé de démontrer une propriété classique des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$ qui relie à de la géométrie élémentaire.

1) Caractérisation des sous-groupes fermés de $\mathbb{R}^n$

Si G est un tel sous-groupe, il a toutes les chances de ne pas être de type fini sur $\mathbb{Z}$ (i.e., engendré par un nombre fini d'éléments), comme par exemple $G = \mathbb{R}$, sauf si c'est un réseau comme $\mathbb{Z}^n$ engendré par les n vecteurs de la base canonique des $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (composantes nulles sauf la i-ième égale à 1), mais on va prouver un théorème de structure qui ramène à deux situations connues : les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et les sous-réseaux.

Définition 1. *Un sous-réseau de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe H engendré par m vecteurs linéairement indépendants $e_1, \dots, e_m$, avec $m \leq n$ (conditions fondamentales). Le nombre m s'appelle la dimension du sous-réseau.*

Autrement dit, $H = \mathbb{Z}\, e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\, e_m$; par exemple, si $n = 3$ et $m = 2$, dès que l'on prend deux vecteurs numériques indépendants comme $\varepsilon_1 = (1, \pi, \sqrt{2})$ et $\varepsilon_2 = (\sqrt{3}, 0, -2)$, on obtient un sous-réseau de $\mathbb{R}^3$ (le terme de réseau est réservé au cas $m = n$). On démontre facilement qu'un sous-réseau H est l'image par une application linéaire du réseau $\mathbb{Z}^n$; pour le cas numérique ci-dessus on peut écrire matriciellement :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbb{Z}^3,$$

défini via l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par la matrice ci-dessus (on a $f(e_1) = \varepsilon_1$, $f(e_2) = \varepsilon_2$, et $f(e_3) = 0$). L'application f n'est pas unique ; il y a une infinité de possibilités car $\mathbb{Z}^n$ et H possèdent chacun une infinité de $\mathbb{Z}$-bases.

Théorème 33. *Tout sous-groupe fermé G de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $G = V \oplus H$* [1]*, où V est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel et H un sous-groupe discret (i.e., un sous-réseau). En outre V est unique (mais non H en général).*

Lemma 1. *Si G (fermé) n'est pas discret, il contient au moins une droite passant par O.*

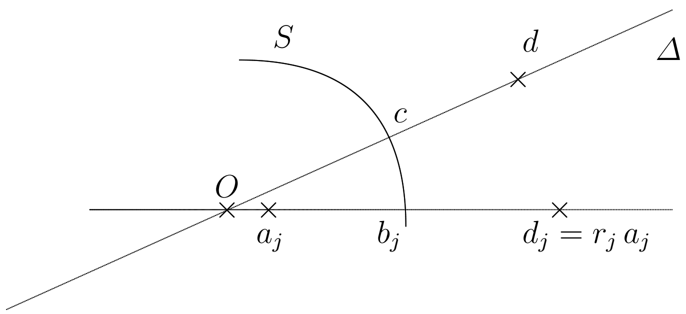
Démonstration. Comme par hypothèse G n'est pas discret, il existe un point $g \in G$ qui n'est pas isolé (sinon G serait discret) ; donc en prenant

(1) La notation $G = V \oplus H$ signifie que tout $g \in G$ peut s'écrire comme somme d'un élément de V et d'un élément de H et que l'on a $V \cap H = \{O\}$; cette écriture est alors unique. Elle revient à dire que $g \in G$ est défini par une composante $v \in V$ et une composante $h \in H$ obtenues géométriquement par projections.

des boules de rayons strictement décroissants convenables, on peut construire une suite de points *distincts* $g_i \neq g$ de G tels que cette suite ait g pour limite. On considère alors la suite des $g'_i := g_i - g$. Il est clair que $g'_i \in G$ (structure de groupe) et que la suite g'_i est formée d'éléments distincts tendant vers O (on dit en analyse que O est point d'accumulation d'éléments de G ; de fait on s'est ramené au cas $g = O$ par translation en montrant que O n'est pas isolé, ce qui va être le point important).

Soit B la boule unité fermée de centre O, pour la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ notée $|\,.\,|$ (i.e., $B = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \ |\,x\,| \leq 1\}$).

Soit $(a_j)_{j\geq 0}$ une suite d'éléments non nuls de G tendant vers O, et associons à a_j le point $b_j := |a_j|^{-1} \cdot a_j \in S$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ \ |\,x\,| = 1\}$ est la sphère unité qui est compacte (car fermée et bornée). Quitte à avoir extrait une sous-suite, on peut supposer que b_j converge vers $c \in S$ (principe topologique qu'il est inutile de démontrer ici car c'est un bel exemple de non effectivité, donc difficilement traduisible en physique, mais on est dans le cadre des $\mathbb{R}$-objets, ou continuum, de cardinalités ayant la puissance du continu) :



Considérons la droite $\Delta := \mathbb{R}\, c$ et montrons que cette droite est adhérente à G, autrement dit que si y est un point quelconque de Δ, alors toute boule de rayon non nul, centrée sur y, rencontre G (on aura alors $\Delta \subseteq G$ puisque G est fermé). Pour cela prenons $d \in \Delta$ et soit r_j l'entier défini par (où E désigne la partie entière d'un réel) :

$$r_j := \mathrm{E}\big(|d| \cdot |a_j|^{-1}\big);$$

on a de façon équivalente :

$$r_j\,|a_j| \leq |d| < (r_j + 1)\,|a_j|.$$

Soit d_j le point $r_j\,a_j$; on a donc $|d_j| = r_j\,|a_j|$ et, par les inégalités ci-dessus,

$$|d| - |a_j| < |d_j| \leq |d|,$$

ce qui prouve que $|d_j| \longrightarrow |d|$ puisque $|a_j| \longrightarrow 0$.

Plus précisément, montrons que $d_j \longrightarrow d$. On a :

$$\begin{aligned} d_j - d &= |d_j|\, b_j - |d|\, c \text{ (puisque } b_j,\, c \in S \text{ et } d_j = r_j\, a_j) \\ &= |d|\, b_j - |d|\, c + |d_j|\, b_j - |d|\, b_j \\ &= |d|\,(b_j - c) + b_j\,(|d_j| - |d|)\ ; \end{aligned}$$

comme $b_j \longrightarrow c$ par hypothèse et que l'on vient de montrer que $|d_j| \longrightarrow |d|$, on obtient le résultat attendu.

Or $d_j = r_j\, a_j \in G$; donc, G étant fermé, $d \in G$. D'où le lemme. □

Démonstration du Théorème 33. Soit V le plus grand sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel contenu dans G : un tel sous-espace existe car si V_1, V_2 sont contenus dans G, le sous-espace engendré par V_1 et V_2 est contenu dans G.

Soit $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ pour $i = 1, \ldots, k$, une $\mathbb{R}$-base de V (vide si $V = \{O\}$), et soit W un $\mathbb{R}$-supplémentaire de V (on a $\mathbb{R}^n = V \oplus W$). Introduisons la projection sur W :

$$p_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow W,$$

posons $H := p_W(G)$, et montrons que $H = W \cap G$: si $x \in H$, $x = p_W(g)$, $g \in G$; si l'on pose $g =: v + w$, $v \in V$, $w \in W$, alors $x = w$; donc, comme $V \subseteq G$, $v \in G$, et par différence $x \in G$; en particulier, on a $H \subseteq G$. Si $x \in W \cap G$, on a $p_W(x) = x \in H$.

Montrons maintenant que H est discret : on remarque que H est fermé comme intersection des deux fermés W et G ; s'il n'est pas discret, par le Lemme 1 il contient une droite non incluse dans V (car contenue dans W), ce qui est contraire à la définition de V.

Vérifions enfin que V et H conviennent (i.e., que $G = V \oplus H$) : si $g \in G$, on a $w := p_W(g) \in H$ et $g - w \in V$; on a $V \cap H = \{O\}$ car $H \subseteq W$.

D'où le théorème.

Remark 3. (i) Si G est discret, $V = \{O\}$ et $H = G$; si G n'est pas discret, il contient une droite et on a $\dim(V) \geq 1$.

(ii) Dès que le $\mathbb{R}$-supplémentaire W n'est pas unique (i.e., V distinct de $\{O\}$ ou de $\mathbb{R}^n$), H n'est pas unique car tout W donne un facteur discret $H \subset G$.

(iii) Si $n = 1$, un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ est soit discret (donc monogène de la forme $a\,\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$) soit non discret et donc égal à $\mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, plusieurs combinaisons de cas sont possibles.

Comme attendu, on retrouve le résultat suivant :

Corollary 1. *Tout sous-groupe non discret de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Son adhérence est un sous-groupe non discret a fortiori, donc égal à $\mathbb{R}$ (seul sous-espace non nul possible).

Example 1. Pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\langle 1, \alpha \rangle_{\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{R}$ puisqu'on sait qu'il n'est pas discret. Si par exemple $\alpha = \sqrt{2}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe a, $b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b\sqrt{2}$ approche x de façon arbitraire fixée à l'avance.

Il se pose maintenant le problème suivant : lorsque l'on se donne un sous-groupe G de $\mathbb{R}^n$, par exemple au moyen d'un système de générateurs, il n'est pas discret en général et donc difficile à représenter géométriquement ; par contre, son adhérence $\overline{G}$ a toujours une structure très simple et constitue le «support géométrique» naturel de G dans le cadre habituel de la géométrie euclidienne classique, donc d'un « fond lisse et idéal ».

De fait, créer le groupe G par combinaisons linéaires à coefficients entiers des générateurs donnés (en nombre fini), constitue le domaine de la physique dans la mesure où l'on peut considérer qu'il s'agit d'un principe de superpositions en nombre fini arbitrairement grand (cf. §§ 1), 2)), le support géométrique n'étant plus du domaine physique stricto sensu puisqu'il peut contenir des continuum.

Afin de trouver facilement le support géométrique de G, on a besoin des définitions suivantes, à partir desquelles on pourra obtenir un algorithme effectif :

Définition 2. (i) *Notons $(x,\, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$ le produit scalaire usuel de deux éléments $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.*

(ii) *Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une $\mathbb{R}$-base fixée de $\mathbb{R}^n$; on appelle base associée à B la $\mathbb{R}$-base $B' := (e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ caractérisée par les relations $(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$ (égal à 1 si $i = j$, à 0 sinon) pour tous i, $j = 1, \ldots, n$.*[2]

(iii) *Si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$, on pose :*

$$G^* := \{u \in \mathbb{R}^n,\ \ (u,\, G) \subseteq \mathbb{Z}\}$$

(i.e., $G^* := \{u \in \mathbb{R}^n,\ \ (u,\, g) \in \mathbb{Z}$ pour tout $g \in G\}$) ; c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ appelé le sous-groupe associé à G.

---

(2) Ici, on peut identifier *canoniquement* l'espace $\mathbb{R}^n$ et son espace dual en raison du choix d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(\,.\,,\,.\,)$ (à la forme linéaire $\varphi \neq 0$ on associe $y \in \mathbb{R}^n$, orthogonal à $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et tel que $(y, y) = \varphi(y)$; on a alors $\varphi = (\,.\,, y)$) ; dans ce cas, on peut dire que la base associée est la base duale. L'existence et l'unicité d'une telle base constituent alors un exercice facile, de même que la relation $(B')' = B$ que nous utiliserons.

Proposition 1. *Le sous-groupe G^* est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$ et on a $(\overline{G})^* = G^*$ (i.e., G et son adhérence $\overline{G}$ ont même groupe associé).*

Démonstration. Si l'on désigne par $\varphi_g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g \in G$, les formes linéaires $u \longrightarrow (u, g)$ sur $\mathbb{R}^n$, G^* apparaît comme l'intersection des images réciproques $\varphi_g^{-1}(\mathbb{Z})$ du fermé $\mathbb{Z}$ par les applications continues φ_g, $g \in G$. Si $u \in G^*$, on a $(u,\, G) \subseteq \mathbb{Z}$, auquel cas $(u,\, \overline{G}) \subseteq \mathbb{Z}$ par prolongement par continuité, ce qui implique $u \in (\overline{G})^*$, d'où $G^* \subseteq (\overline{G})^*$; l'inclusion opposée étant triviale, on a égalité.

Noter que l'on a $\{O\}^* = \mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^* = \{O\}$.

2) Théorème de dualité diophantienne de Kronecker

Le résultat fondamental qui donne le support géométrique d'un sous-groupe quelconque de $\mathbb{R}^n$ est alors le suivant (d'après [Gr], Ch. XX, § 7, pour le cas général ainsi que [HW], Ch. XXIII, pour diverses preuves et applications) :

Théorème 34. *Soit G un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$. Alors l'adhérence $\overline{G}$ de G est donnée par l'expression $\overline{G} = (G^*)^*$ où l'opération $*$ est ainsi définie : si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$ alors Γ^* est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $(x, \gamma) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, où $(\,.\,,\,.\,)$ désigne le produit scalaire usuel.*

La démonstration va reposer sur le lemme suivant qui utilise le Théorème 33 :

Lemma 2. *Soit Γ un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}^n$; posons $\Gamma =: V \oplus H$, où :*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}e_i,\ H = \bigoplus_{j=\ell+1}^{\ell+m} \mathbb{Z}e_j,$$

et soit $S = \displaystyle\bigoplus_{k=\ell+m+1}^{n} \mathbb{R}e_k$ un supplémentaire de $\mathbb{R}\Gamma$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\mathbb{R}\Gamma$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par Γ. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ la base obtenue à partir de la réunion des bases précédentes ($\mathbb{R}$-base de V, $\mathbb{Z}$-base de H, et $\mathbb{R}$-base de S).

Soit $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ la base duale de B (i.e., la base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ caractérisée par les relations $(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) pour tous $i,\, j = 1, \ldots, n$).

Alors $\Gamma^* = S' \oplus H'$, et V' est un supplémentaire de $\mathbb{R}\Gamma^*$ dans $\mathbb{R}^n$, où l'on a posé :

$$V' = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}e'_i, \quad H' = \bigoplus_{j=\ell+1}^{\ell+m} \mathbb{Z}e'_j, \quad S' = \bigoplus_{k=\ell+m+1}^{n} \mathbb{R}e'_k.$$

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^n$; on a $u \in \Gamma^*$ si et seulement si $(u, \Gamma) \subseteq \mathbb{Z}$, donc si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) $(u, \lambda_i\, e_i) \in \mathbb{Z}$, pour tout $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, \ell$,

(ii) $(u, \lambda_j\, e_j) \in \mathbb{Z}$, pour tout $\lambda_j \in \mathbb{Z}$, $j = \ell + 1, \ldots, \ell + m$,

ce qui équivaut facilement à :

(i′) $(u,\, e_i) = 0$, pour $i = 1, \ldots, \ell$,

(ii′) $(u,\, e_j) \in \mathbb{Z}$, pour tout $j = \ell + 1, \ldots, \ell + m$.

Ecrivons alors u sur la base duale B' : $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i\, e'_i$, $\lambda'_i \in \mathbb{R}$; les conditions (i′), (ii′) se traduisent alors par :

(i″) $\lambda'_1 = \cdots = \lambda'_\ell = 0$,

(ii″) $\lambda'_{\ell+1}, \ldots, \lambda'_{\ell+m} \in \mathbb{Z}$;

les conditions sur $\lambda'_{\ell+m+1}, \ldots, \lambda'_n$ étant vides, on a donc comme annoncé :

$$\Gamma^* = \bigoplus_{j=\ell+1}^{\ell+m} \mathbb{Z}e'_j \bigoplus_{k=\ell+m+1}^{n} \mathbb{R}e'_k =: S' \oplus H' \;\; ;$$

il est clair que $V' = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}e'_i$ est un supplémentaire de $\mathbb{R}\Gamma^*$.

Corollary 2. *Pour tout sous-groupe fermé Γ de $\mathbb{R}^n$, on a $(\Gamma^*)^* = \Gamma$.*

Démonstration. En effet, par dualité, la base duale de B' est B, auquel cas on a, selon le même processus qui échange les rôles des trois composantes[3] $(\Gamma^*)^* = (V')' \oplus (H')' = V \oplus H = \Gamma$, de supplémentaire S.

Démonstration du Théorème 34. Si l'on applique ceci à l'égalité $(\overline{G})^* = G^*$, on a $((\overline{G})^*)^* = ((G)^*)^*$; or $\overline{G}$ étant fermé, le premier membre est $\overline{G}$ (d'après le Corollaire 2).

D'où le théorème de Kronecker. □

En pratique G sera de « type fini », c'est-à-dire engendré sur $\mathbb{Z}$ par un nombre fini d'éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, auquel cas la condition $(x, \gamma) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ est équivalente à $(x, \gamma_i) \in \mathbb{Z}$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Appliqué à notre problème du Chapitre V, pour trouver G^* on a donc à résoudre, en utilisant les générateurs $(1, 0)$, $(0, \alpha)$, et (α, α^{-1}) de G, le système suivant en $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, qui stipule l'existence d'entiers a, b, c tels que :

---

(3) L'écriture $\Gamma^* = S' \oplus H'$, où $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\Gamma \oplus S$, utilise le fait que Γ est fermé, Γ^* étant toujours fermé d'après la Proposition 1.

$$\begin{aligned}\big((u,v).(1,0)\big) &= a \in \mathbb{Z},\\ \big((u,v).(0,\alpha)\big) &= b \in \mathbb{Z},\\ \big((u,v).(\alpha,\alpha^{-1})\big) &= c \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

qui est équivalent au système :

$$\begin{aligned}(u,v) &= (a, b\,\alpha^{-1}),\\ a\,\alpha^3 - c\,\alpha^2 + b = 0.\end{aligned}$$

Si α n'est racine d'aucune équation de degré 3 à coefficients entiers, il est clair que nécessairement $a = b = c = 0$, que $G^* = \{0\}$, et donc $\overline{G} = (G^*)^* = \mathbb{R}^2$ (densité de G dans $\mathbb{R}^2$).

Dans le cas contraire, on a plusieurs situations selon que l'équation est de degré 1, 2 ou 3.

Traitons le cas $\alpha = \sqrt{2}+1$ pour lequel $\alpha^{-1} = \sqrt{2}-1$. On a la relation $a\,\alpha^3 - c\,\alpha^2 + b = 0$, soit $a\,(5\sqrt{2}+7) - c\,(2\,\sqrt{2}+3) + b = 0$ qui conduit à $5\,a - 2\,c = 0$ et $7\,a + b - 3\,c = 0$, ce qui est équivalent à $a = 2\,b$ et $c = 5\,b$. D'où $(u,v) = (2, \sqrt{2}-1)\,b$, $b \in \mathbb{Z}$. On a donc obtenu $G^* = (2,\sqrt{2}-1)\,\mathbb{Z}$. On a ensuite $(u',v') \in (G^*)^*$ si et seulement si $\big((u',v').(2,\sqrt{2}-1)\big) = a' \in \mathbb{Z}$ qui est équivalent à $v' = (\sqrt{2}+1)\,a' - 2\,(\sqrt{2}+1)\,u'$ ou encore à $(u',v') = (1, -2\,(\sqrt{2}+1))\,u' + (0,\sqrt{2}+1)\,a'$. Pour u' variant dans $\mathbb{R}$ et a' dans $\mathbb{Z}$, le réel v' existe toujours et on obtient :

$$\begin{aligned}(G^*)^* &= (1, -2\,(\sqrt{2}+1))\,\mathbb{R} \bigoplus (0, \sqrt{2}+1)\,\mathbb{Z}\\ &= \Big(\tfrac{1}{2}, -(\sqrt{2}+1)\Big)\,\mathbb{R} \bigoplus (0,\sqrt{2}+1)\,\mathbb{Z},\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire sous la forme :

$$\overline{G} = (G^*)^* = \Big(\tfrac{1}{2}, -(\sqrt{2}+1)\Big)\,\mathbb{R} \bigoplus \Big(\tfrac{1}{2}, 0\Big)\,\mathbb{Z}.$$

On obtient alors la figure du § 2).

3) Conclusion

On peut retenir de ce résultat profond que toute combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de quantités à caractères physiques et métriques (ou supposés tels), ce qui correspond à un certain nombre d'additions (ou superpositions expérimentales), conduit nécessairement à des situations imprévisibles car dépendant des propriétés diophantiennes (i.e., de théorie des nombres) des quantités métriques (ou supposées telles) utilisées. Ce type de questionnement est rarement posé en matière d'expériences de physique et on peut même contester la faisabilité.

Le cas des systèmes dynamiques est certes bien connu où interviennent des valeurs numériques « sensibles » au niveau des propriétés diophantiennes des paramètres, valeurs initiales, . . . , mais ici on ne peut pas parler de systèmes dynamiques complexes puisque seul le caractère additif le plus banal intervient. D'où la nécessité de confronter tout aspect expérimental à cet aspect mathématique, comme nous l'avons déjà évoqué au Chapitre V, ce qui pose un problème philosophique quant à l'idée même de métrisabilité des « grandeurs » physiques.

Chapitre VII

Structures quotients et indétermination quantique

On sait que pour toute structure (algébrique, topologique, ...) il y a une notion de structure quotient qui consiste à utiliser une relation d'équivalence définissant une partition de l'ensemble $\mathcal{E}$ de départ en classes (cf. § b), (i)), mais surtout qui consiste à induire sur l'ensembles des classes une structure analogue (algébrique, topologique, ...) directement issue de la précédente. Il faut évidemment des conditions de compatibilité entre la structure et la relation d'équivalence. Nous l'avons rencontrée pour la définition du Solénoïde p-adique § 6).

Commençons par un exemple mathématique très simple pour analyser ensuite l'interprétation de la notion de quotient qui peut en être faite en physique.

1) Un exemple algébrique

Considérons le groupe additif $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ puis, pour un vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé non nul et pour un réel ε fixé non nul, considérons le sous-groupe $\mathcal{E} = (\mathbb{R}(a, b)) \times \mathbb{Z}\,\varepsilon$; autrement dit, $\mathbb{R}(a, b) := \{\lambda\,.\,(a, b),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est une droite contenue dans le plan $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{Z}\varepsilon := \{n\,.\,\varepsilon,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Au plan mathématique, le quotient $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/(\mathbb{R}(a, b)) \times \mathbb{Z}\,\varepsilon$ est isomorphe au produit $(\mathbb{R}^2/\mathbb{R}(a, b)) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}\,\varepsilon \simeq (\mathbb{R}^2/\mathbb{R}(a, b)) \times T_\varepsilon$, où le «tore» T_ε peut être vu comme un cercle de circonférence ε muni d'une loi de groupe évidente (on additionne sur le cercle au moyen de l'addition des angles correspondants, l'angle 2π redonnant l'angle nul), ou bien comme l'intervalle $[0, \varepsilon[$ muni de la loi suivante : pour $x,\, y \in [0, \varepsilon[$, $x + y$ est l'unique $z \in [0, \varepsilon[$ pour lequel il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = z + n\,\varepsilon$.

En ce qui concerne le quotient partiel $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}(a, b)$, on peut trouver un supplémentaire D (ici une droite) tel que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}(a, b) \oplus D$ de sorte que le quotient s'«identifie» à D. Au total le quotient $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{R}(a, b) \times \mathbb{Z}\,\varepsilon$ est isomorphe à $D\times T_\varepsilon$. Ici on ne se préoccupe pas de transports de structures et l'objet crée n'est considéré que dans son unicité intellectuelle.

Mais les mathématiciens préfèrent ne pas rentrer dans ces manipulations géométrico-topologiques (non uniques déjà par le choix de D et de la représentation du tore T_ε) et considèrent la relation d'équivalence dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ modulo le sous-groupe $\varGamma := \mathbb{R}\,(a,b,0) \times \mathbb{Z}\,(0,0,\varepsilon)$, relation définie par $X \sim Y$ (où X et Y sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$) si et seulement si il existe $z \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $Y - X = (z\,a,\ z\,b,\ n\,\varepsilon)$.

Le quotient $\mathcal{E}/\varGamma$ est alors par définition *l'ensemble des classes* $cl(X)$ et non plus un ensemble « identifié » à un objet géométrique fabriqué avec une droite et un cercle (qui peut se représenter par un cylindre).

Cette nuance est capitale car au plan cardinalités, une classe est un ensemble équipotent à $\varGamma$ qui peut être fini ou infini comme ici. On voit donc que l'on a une « existence » comme celles que l'on a rappelées en détail dans le Chapitre III, § 2).

On peut poursuivre cette analyse en considérant la structure topologique (voir les rappels au Chapitre IX) que l'on a naturellement sur $\mathbb{R}^3$ à partir de la valeur absolue $|\ |_\infty$ et considérer la « topologie quotient » (de façon élémentaire car le cas général des topologies quotients est plus délicat) : sur le facteur isomorphe à D, donc à $\mathbb{R}$, on retrouve la topologie métrique usuelle, mais sur le tore T_ε isomorphe par exemple au cercle unité $\mathbb{S}^1$ du plan (via une homothétie qui « remplace » ε par 2π), c'est un peu plus subtil.

Le résultat général est que les ouverts de la topologie quotient sont par définition les parties $\overline{O}$ dont l'image réciproque, par l'application cl : $\rho \mapsto cl(\rho)$, est un ouvert de $\mathbb{R}$; si $\overline{O}$ est une partie de $\mathbb{S}^1$ il existe une partie $O \subset [0, 2\pi[$ unique dont l'image est $\overline{O}$ (O est un système exact de représentants des classes qui se « voit ») et on a :

$$cl^{-1}(\overline{O}) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(O + 2\pi n\,\mathbb{Z}\big),$$

obtenu en translatant O une infinité de fois. Distinguons deux cas :

(i) $0 \notin O$; alors (en considérant $]0, 2\pi[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ on voit que nécéssairement $O \subseteq]0, 2\pi[$ est un ouvert donc réunion de petits intervalles ouverts de la forme $]u, v[$ tels que $0 < u < v < 2\pi$, dont l'image donne de petits arcs de cercle définis via les angles $\theta \in]\varphi, \psi[$, où $0 < \varphi < \psi < 2\pi$.

(ii) $0 \in O$; cela semble poser problème à cause du choix de O. Si il existe $a \in [0, 2\pi[$ tel qu'il existe $O' \subseteq]a, a + 2\pi[$ qui soit un système exact de représentants des classes, on peut conclure avec le même raisonnement (par exemple, si $\overline{O} = \mathbb{S}^1\backslash\{x\}$, c'est encore possible avec $a = x$).

(iii) Si ce qui précède est impossible, c'est que $O = [0, 2\pi[$ est un système exact de représentants des classes, auquel cas $\overline{O} = \mathbb{S}^1$ qui est toujours un ouvert

En résumé, les ouverts de $\mathbb{S}^1$ sont les réunions arbitraires d'arcs de cercle ouverts définis via les angles $\theta \in]\varphi, \psi[$, où cette fois φ et ψ sont quelconques ; par exemple, si $\varphi = 0$ et $\psi = 2\pi$, l'arc correspondant est défini par $]0, 2\pi[$ qui exclue le point $\{0\}$ (un fermé) ; dès que $|\psi - \varphi| > 2\pi$ on obtient l'ouvert $\overline{O} = \mathbb{S}^1$.

2) Une tentative d'interprétation en physique

De fait la classe de X (notée $cl(X)$) est donc l'ensemble $cl(X) = X + \varGamma := \{X + \gamma,\ \gamma \in \varGamma\}$ et l'on voit bien que X, qui s'appelle alors un représentant de la classe $cl(X)$, est en fait indéterminé si l'objet « physique » considéré, « visible » et « connaissable » est seulement la classe $cl(X)$. En effet, tout élément $Y = X + \gamma$, $\gamma \in \varGamma$, joue le même rôle que X de façon indiscernable, autrement dit $cl(X) = cl(Y)$. Pour cela reprendre l'exemple de $\mathbb{S}^1$: si l'on vit sur ce cercle, comment savoir d'où vient sa position en tant que $cl(X)$?

Resterait à voir si l'Univers, tel que visible expérimentalement, peut être vu de cette façon au moyen d'une « complication adaptée » à partir d'un pré-univers $\mathcal{E}$, qui pourrait éventuellement être décrit en termes de $\mathbb{R}$-objets, le quotient de $\mathcal{E}$ par une relation d'équivalence convenable pouvant tout à fait être discret en un sens. Il est possible qu'un expérimentateur, lui-même constitué de classes (ainsi que ses appareils de mesure), n'ait accès qu'aux classes, sauf peut-être en ce qui concerne la notion de « mesure physique ».

En effet, on pourrait imaginer que la notion de mesure (qui pose un problème d'« extraction » d'information de l'Univers) se ramène non plus à une classe, mais seulement à l'un de ses représentants (donc non unique, voire aléatoire ou indéterminé). Cette façon de voir suppose implicitement la notion de quantité ou phénomène « émergent » (les classes), comme le temps, voire l'espace lui-même, tels que nous les percevons et croyons les mesurer.

Allons plus loin en considérant un exemple d'école, très pauvre, mais à caractère métaphorique comme expérience de pensée. Supposons que la particule π ait à l'instants T la position A et une vitesse V à partir d'une condition initiale $(0, 0)$ de temps et d'espace, où ces notions émergentes sont des classes :

$$T = cl(t),\, A = cl'(a),\, V = cl\text{»}\ (v)),$$

les définitions des ensembles sous-jacents et des relations d'équivalence associées étant ici secondaires, les classes étant la seule réalité émergente visible. Mais on peut supposer implicitement que tout ceci est défini modulo un multiple d'un infinitésimal universel ϵ de distance par exemple, les autres s'en déduisant via les questions d'unités et de normalisations habituelles (aspects analysés au § 3)).

Supposons alors qu'une mesure corresponde, par nature, à l'obtention de représentants t, a, v, de sorte que la relation formelle $A = V \times T$ dans l'espace quotient n'est connue que via la relation-mesure :

$$a \sim v \times t \pmod{\mathbb{N}\,\epsilon},$$

ou encore $a = v \times t + n\,.\,\epsilon$, où la taille de n (très grande par rapport aux données) serait associé à la précision de la mesure dès lors qu'on est dans le cas numérique (et non à compter des boules dans une urne). On suppose pour simplifier que les mesures de temps sont exactes. Alors si a est de la forme $a_0 + i\,.\,\epsilon$ où a_0 figure la valeur exacte (ou supposée telle) et si de même v est de la forme $v_0 + j\,.\,\epsilon$, il vient $a_0 + i\,.\,\epsilon = (v_0 + j\,.\,\epsilon)\, t_0$ qui relie i et j par la relation linéaire $i = j\,.\,t_0 + n$ qui indique que si j est petit, i est grand et inversement ; pour $j = 0$, $i = n$ (imprécision maximale) et pour $i = 0$, $j = \frac{-n}{t_0}$ également grand (noter que le signe de n est a priori inconnu).

Il vient donc un principe d'incertitude disant que si les positions et les temps sont connus, la vitesse ne l'est pas, et plus généralement, rien n'est véritablement connu, en tous cas pas les trois notions à la fois. De fait toute relation de physique classique émergente serait alors susceptible de ce phénomène.

On peut lire dans les ouvrages de physique des assertions du type suivant (en prenant pour simplifier une particule de masse 1, auquel cas la vitesse coïncide avec l'impulsion) :

« *Des mesures répétées de la position et de la vitesse donneront des résultats en général différents à chaque mesure : chaque échantillon de valeurs sera caractérisé par un écart type σx pour la position, et σv pour la vitesse. Le théorème de Heisenberg démontre que $\sigma x \times \sigma v \geq \frac{1}{2}\hbar$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite* .

Ainsi le point de vue « quotients », même dans un cadre aussi naïf que celui présenté ici, n'est pas incompatible avec ce théorème. D'un point de vue heuristique, l'univers $\mathcal{E}/\sim$ contient par définition le visibles, tout système physique (dont nous-mêmes), qui par nature n'a pas accès au pré-univers (mental sans doute) $\mathcal{E}$; il semble alors que l'idée de mesure ne soit pas de nature « visible », mais appartienne à un pré-univers avec principe d'incertitude obligé.

Ceci n'est pas étranger au fait que l'idée même de mesure est très ambiguë, certains scientifiques la rattachant à notre spécificité humaine et de plus à celle de conscience (cf. Commentaire 14 ainsi que le § 6)). Voir également le long débat ([EZ], Séance II, pp. 99–104) montrant l'extrême difficulté, pour des physiciens éminants, à décider de la notion de réalité, d'expérience, de mesure (avec ou sans expérimentateur), de conscience, d'états, etc. En effet, disposer d'une mesure exacte violerait sans doute un principe fondamental restant à préciser.

Chapitre VIII

Le transport de structures et ses contraintes

L'inconvénient majeur de la construction classique du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est que l'anneau $\mathbb{Z}$ de départ est en fait perdu (sous peine de contradictions) ; on avait rencontré le même problème pour définir les entiers naturels (i.e., avec signe) dans la mesure où 1 deviendrait par définition la classe $\{(1,0)\,;\,(2,1)\,;\,\ldots\,;\,(n+1,n)\,;\,\ldots\}$ dans cette nouvelle construction.

De fait ce phénomène est beaucoup plus général et on peut commencer par un exemple géométrique indépendant de toute structure algébrique, ce qui peut constituer une approche logique pouvant avoir une correspondance avec la physique et sa « réalité » de ce que on appelle le « transport de structure ».

1) Un exemple naïf

Plaçons nous en dehors de toute construction (ensembliste ou non) des réels et considérons une « droite » D et ses « points » M (notions premières ou le Big-Bang de la géométrie si l'on veut, D n'étant contenue dans rien de préexistant).

La règle du jeu est toujours la même : on construit par des moyens logiques simples de nouveaux objets uniquement à partir de ce qui préexiste ; en outre, on s'interdit de perdre les anciennes constructions (c'est-à-dire ce qui existe) au sens où le mot « perdre » signifie de fait accepter un illogisme sur la désignation de l'objet et sur sa réalité, ce que les mauvaises mathématiques appellent l'« identification ».

On peut alors construire de façon rigoureuse un plan P contenant D (ou passant par D), de la façon suivante :

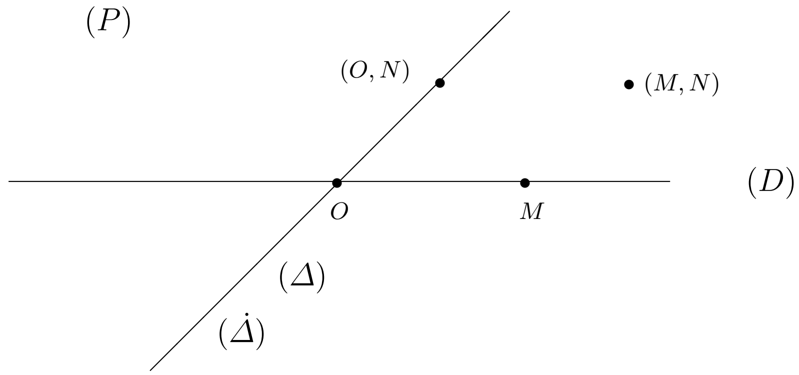
On construit d'abord l'ensemble auxiliaire $P' := D \times D$ formé des couples (M, N) de points de D (en dehors de toute structure d'espace vectoriel, de tout aspect métrique ou d'ordre dans D et P') ; il est clair que si l'on fixe un point $O \in D$, l'ensemble $D' := \{(M, O) \in P',\ M \in D\}$ est géométriquement un ensemble auxiliaire «identifiable» à D, mais distinct de D qui n'est pas contenue dans P'.

L'ensemble plus compliqué qui résulte du transport de structure est obtenu en posant :

$$P := (P' \backslash D') \cup D = ((D \times D) \backslash D') \cup D;$$

il est alors constitué d'objets de la forme (M, N) pour tout $M, N \in D$, $N \neq O$, et des points M de D car $(P' \backslash D') \cap D = \emptyset$.

La « droite » auxiliaire D' n'est pas dans la figure finale P qui par contre contient D et $P' \backslash D'$.



Le sous-ensemble particulier $\dot{\varDelta} := \{(O, N) \in P,\ N \in \varDelta,\ N \neq O\}$ de P (droite de P privée du point (O, O) car par construction, $(O, O) \notin P$, seul O est dans P comme élément de D) permet de visualiser le plan P et de définir les coordonnées des points de P. On peut obtenir une droite entière $\varDelta := \dot{\varDelta} \cup \{O\}$ en rajoutant O à $\dot{\varDelta}$ (on a alors $\varDelta \cap D = \{O\}$ sinon $\dot{\varDelta} \cap D = \emptyset$).

On a intellectuellement unicité du plan P passant par D, mais non unicité matérielle (infinité de choix pour O, outre le procédé particulier choisi).

Peut-on dire, dans ce cadre simplet, que P est l'« univers », construit par étapes et que P' (entité abstraite plus lisse et calculable) est une notion « émergente » ?

On pourrait objecter que tout est parfait (et plus simple) si l'on vit directement dans le plan $P' = D \times D$ au lieu de P. Mais cela suppose une « création » soudaine, indépendante de D : D n'aurait pas préexisté, car non contenue dans ce produit cartésien, l'écriture même $D \times D$ étant alors absurde. En outre, tout processus évolutif par transport (D, P, V

volume construit à partir de P, etc.) établirait l'anéantissement logique des constructions antérieures, ce qui n'a aucun sens au plan physique.

Au moins en mathématique, le créationnisme ex abrupto n'est pas possible ou alors il n'aurait aucune évolution conservatrice possible sans le processus décrit. On notera cependant que la construction de P' peut être qualifiée d'abstraite tandis que celle de $P' \setminus D'$ devient concrète en tant que partie de la réalité P ; il y a là un aspect logique délicat qui semble pourtant inévitable, mais $P' \setminus D'$ peut être considéré comme engendré par D sans contradiction existentielle dans la mesure où (point capital de la légalité du transport de structure) on a $(P' \setminus D') \cap D = \emptyset$, $\emptyset$ étant un vide logique et non le vide physique dont on pense d'ailleurs qu'il est « presque tout ». [1]

2) Cas du corps des rationnels

Revenons au cas de $\mathbb{Q}$, plus emblématique encore et plus intéressant que $\mathbb{Z}$ (d'après [Gr], Ch. X, § 2.7).

En effet, les entiers usuels, éléments de $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, n'existent plus dans $\mathbb{Q}$, celui-ci ne contenant, par construction, que les objets de l'ensemble :

$$\left\{ \cdots\, ;\, \frac{-2}{1}\, ;\, \frac{-1}{1}\, ;\, \frac{0}{1}\, ;\, \frac{1}{1}\, ;\, \frac{2}{1}\, ;\, \cdots \right\}$$

(fractions entières), et toute « identification » conduit à une contradiction ensembliste, car par exemple les objets 1 et $\frac{1}{1}$ sont distincts ; leur nature réelle est la suivante, en termes ensemblistes :

$$1 = \{\emptyset\} \text{ et } \frac{1}{1} = \left\{ \ldots\, ;\, (-n, -n)\, ;\, \ldots\, ;\, (-1, -1)\, ;\, (1, 1)\, ;\, \ldots\, ;\, (n, n)\, ;\, \ldots \right\}$$

qui est un ensemble infini dénombrable, tandis que $\{\emptyset\}$ est un ensemble précisément à un élément.

On peut alors croire qu'il suffit de faire un changement de notations ; or, s'il est possible de nommer 1 la fraction entière correspondante $\frac{1}{1}$ (et ainsi de suite), les anciennes notations des entiers (comme 1) ne peuvent être conservées et doivent être changées (en $0', 1'$, etc. pour pouvoir écrire $1 = \frac{1'}{1'}$), mais ceci est impensable car ceci voudrait dire que toute construction mathématique ($\mathbb{R}$ par rapport à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ par rapport à $\mathbb{R}$, etc.) modifierait, en cascade, les notations antérieures (pour que 1 désigne toujours l'unité de $\mathbb{C}$ par exemple).

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/vide-physique, par Jean-Marc Lévy-Leblond.

L'idée est au contraire d'agrandir les ensembles considérés et d'étendre les opérations usuelles à ces nouveaux ensembles, de façon cohérente ; ceci est rendu possible par le transport de stucture qui a le double avantage d'éliminer toute contradiction ensembliste et, surtout, d'être totalement naturel (et même physiquement obligatoire si l'on imagine un jeu d'enfant où les « types de nombres » crées successivement seraient des objets en bois !) :

3) Principe général appliqué à la construction de $\mathbb{Q}$

Appelons $\mathbb{Q}'$ (et non $\mathbb{Q}$) le corps précédemment construit (comme quotient de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ par la relation d'équivalence habituelle, muni des deux lois de composition notées $+'$ et $\times'$, de neutres $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$) ; il nous servira de corps auxilliaire (insistons sur le fait qu'il n'est pas question de se passer de $\mathbb{Q}'$, son seul défaut étant qu'il ne contient pas $\mathbb{Z}$).

Le seul prix à payer pour justifier le transport de structure est le résultat suivant qui résulte d'une construction rigoureuse des objets de la théorie des ensembles :

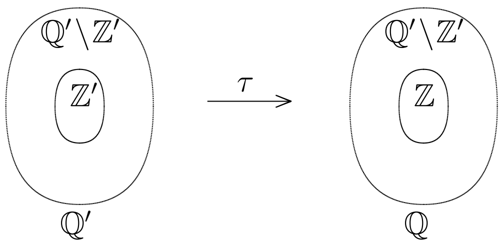
$$\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset.$$

En pratique, on peut se convaincre de ce fait, en examinant la nature ensembliste des éléments de $\mathbb{Q}'$ par rapport à celle de ceux de $\mathbb{Z}$.

Ceci étant, on peut considérer le schéma suivant, où l'on a posé $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{Q}'\backslash\mathbb{Z}')$ (réunion disjointe de $\mathbb{Z}$ et de la « couronne » $\mathbb{Q}'\backslash\mathbb{Z}'$), et où τ est une bijection définie comme suit :

(i) sur $\mathbb{Q}'\backslash\mathbb{Z}'$, τ est l'identité,

(ii) sur $\mathbb{Z}'$, τ est défini par $\tau\left(\frac{a}{1}\right) = a$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$) :



On munit $\mathbb{Q}$ des lois de composition $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ suivantes :

$$u \tilde{+} v = \tau\Big(\tau^{-1}(u) +' \tau^{-1}(v)\Big), \;\; u \tilde{\times} v = \tau\Big(\tau^{-1}(u) \times' \tau^{-1}(v)\Big),$$

pour tout $u, v \in \mathbb{Q}$; on vérifie que l'on obtient alors un corps (de neutre 0 et d'élément unité 1 (ceux de $\mathbb{Z}$)). Mais, par définition du transport τ, on a (en utilisant τ^{-1}) :

$$\tau^{-1}(u \tilde{+} v) = \tau^{-1}(u) +' \tau^{-1}(v),\ \tau^{-1}(u \tilde{\times} v) \\ = \tau^{-1}(u) \times' \tau^{-1}(v),\ \tau^{-1}(1) = \frac{1}{1},$$

ce qui fait que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ sont des corps isomorphes. Le plus important est alors que $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$:

On a, par définition, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, et si $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :

$$a \tilde{+} b = \tau\Big(\tau^{-1}(a) +' \tau^{-1}(b)\Big) = \tau\Big(\frac{a}{1} +' \frac{b}{1}\Big) \quad \text{(cf.(ii))} \\ = \tau\Big(\frac{a+b}{1}\Big) \text{ (par définition de } +') = a + b \text{ (toujours (ii)) ;}$$

on a :

$$a \tilde{\times} b = \tau\Big(\tau^{-1}(a) \times' \tau^{-1}(b)\Big) = \tau\Big(\frac{a}{1} \times' \frac{b}{1}\Big) == \tau\Big(\frac{a \times b}{1}\Big) = a \times b;$$

on a :

$$a \tilde{+} (-a) = \tau\Big(\tau^{-1}(a) +' \tau^{-1}(-a)\Big) = \tau\left(\frac{a}{1} +' \frac{-a}{1}\right) = \tau\left(\frac{0}{1}\right) = 0,$$

et par conséquent l'opposé de a (pour $\tilde{+}$) est $-a$ (celui de a pour $+$). Enfin on vérifie que les neutres pour $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ sont 0 et 1. Donc les restrictions des lois $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont les lois initiales $+$ et $\times$ de A ; dans ce cas il est alors normal (et non contradictoire) de noter $\tilde{+}$ et $\tilde{\times}$ par $+$ et $\times$, puisqu'il s'agit de prolongements de $+$ et $\times$ à $\mathbb{Q}$.

4) Exemples de calculs.

Considérons les 4 types de calculs possibles (avec la somme) :

$$\begin{aligned} 1+3 &= \tau\Big(\tau^{-1}(1) +' \tau^{-1}(3)\Big) = \tau\Big(\frac{1}{1} +' \frac{3}{1}\Big) = \tau\Big(\frac{4}{1}\Big) = 4, \\ 2 + \frac{2}{3} &= \tau\Big(\tau^{-1}(2) +' \tau^{-1}\Big(\frac{2}{3}\Big)\Big) = \tau\Big(\frac{2}{1} +' \frac{2}{3}\Big) = \tau\Big(\frac{8}{3}\Big) = \frac{8}{3}, \\ \frac{1}{5} + \frac{2}{3} &= \tau\Big(\frac{1}{5} +' \frac{2}{3}\Big) = \tau\Big(\frac{13}{15}\Big) = \frac{13}{15}, \\ \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \tau\Big(\frac{2}{3} +' \frac{4}{3}\Big) = \tau\Big(\frac{6}{3}\Big) = \tau\Big(\frac{2}{1}\Big) = 2. \end{aligned}$$

En conclusion, on retiendra que le transport de structure permet effectivement de construire un corps $\mathbb{Q}$ contenant $\mathbb{Z}$ comme sous-anneau, et, une fois les règles de calcul établies, on abandonne l'usage de τ, seules

les lois $+$ et $\times$ de $\mathbb{Z}$ intervenant en fait. On observera également que, dans ce cadre, les entiers ne sont pas des fractions (en effet, dans cette construction, on abandonne $\mathbb{Z}'$) et l'écriture $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}$ n'est pas correcte car $\frac{6}{3}$ n'est ni dans $\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{Q}'\backslash\mathbb{Z}'$.

Autrement dit, si l'on veut un cadre «théorie des fractions», on se placera exclusivement dans $\mathbb{Q}'$, en appelant entières les fractions de $\mathbb{Z}'$, et si l'on veut faire de l'algèbre à partir de l'anneau $\mathbb{Z}$, on se placera dans $\mathbb{Q}$, en sachant que tout élément de $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ est inversible dans $\mathbb{Q}$ et que tout élément de $\mathbb{Q}$ est de la forme ab^{-1}, pour $a, b \in \mathbb{Z}$, et on proscrira la notation fractionnaire ; on voit alors que $6\times 3^{-1} = \tau\Big(\tau^{-1}(6)\times'\tau^{-1}(3)^{-1}\Big) = \tau\Big(\frac{6}{1}\times'\frac{1}{3}\Big) = \tau\Big(\frac{6}{3}\Big) = 2$ (écriture qui, elle, a un sens dans $\mathbb{Q}$).

5) Conclusion

Tout cet effort a le mérite de montrer que l'existence réelle d'objets mathématiques peut se concevoir, même si ensuite on simplifie énormément en oubliant qu'on manipule alors des écriture symboliques, plutôt illégitimes, et non les objets eux-mêmes. C'est cette «unicité intellectuelle» que nous avons évoquée dès le début et qui suffit dans la pratique (heureusement car, comme pour le formalisme logique « à la Hilbert », largement édulcoré depuis, l'aspect constructif précédent serait impraticable et même ridicule).

Il serait intéressant de savoir si pour la physique ces deux stades existent logiquement ; ils correspondraient peut-être à la distinction entre «existence inobservable», car plutôt axiomatique, et « illusion d'une perception mesurable » qui correspondrait, comme pour l'usage normal des Mathématiques, à la physique telle que largement décrite dans les extraits du Chapitre I et susceptible de calculs classiques comme rappelé au § 1) ci-après.

Chapitre IX

Aspects topologiques Exemples en direction de concepts physiques

Faisons quelques rappels au sujet d'une partie fondatrice des mathématiques, avec l'Algèbre, à savoir la Topologie générale souvent limitée aux topologies métriques (analyse réelle classique issue de la valeur absolue archimédienne $|\ |_\infty$) ; ces deux pans naturels des mathématiques se conjuguant presque toujours en des structures compatibles (groupes et anneaux topologiques) pouvant éclairer nos considérations sur la physique.

Nous illustrerons ces questions de topologie au moyen du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ; ceci peut paraître surprenant, mais $\mathbb{Q}$ est le domaine « numérique » le plus simple après $\mathbb{Z}$ et présente, via ses sous-groupes qui « héritent » de la topologie considérée, des situations physiquement réalistes ; mais surtout on sera peut-être surpris d'apprendre que $\mathbb{Q}$ peut être muni de topologies qui respectent l'addition et la multiplication tout en étant différentes des topologies induites par les valeurs absolues p-adiques $|\ |_p$ et la valeur absolue $|\ |_\infty$. Autrement dit, nous utilisons $\mathbb{Q}$ non tellement pour sa réalité physique (relative), mais pour montrer que l'aspect classiquement métrique est extrêmement réducteur en pratique, même sur des domaines très simples.

1) Principales définitions

Rappelons qu'une topologie sur un ensemble E est destinée à définir les *voisinages* d'un point $x \in E$ (en un sens concret) dans l'idée de généraliser le cas bien connu des distances, mais pas seulement puisque dans le cadre des mesures en physique classique tout est « distance » ou « grandeurs » aux unités près (« dans environ dix secondes » représente un voisinage temporel plus petit que « dans environ dix minutes »).

a) Ouverts – Voisinages

Les ouverts de E constituent une famille $\mathcal{O}_E$ de parties de E, posée par définition, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\emptyset$ et E sont dans $\mathcal{O}_E$,

(ii) toute intersection *finie* d'éléments de $\mathcal{O}_E$ est dans $\mathcal{O}_E$,

(iii) une réunion quelconque (finie ou infinie) d'éléments de $\mathcal{O}_E$ est dans $\mathcal{O}_E$.

Ainsi muni, E s'appelle un espace topologique. Les voisinages de x sont alors les parties V de E ayant la propriété qu'il existe un *ouvert* O tel que $x \in O \subseteq V$,

Compte tenu, a priori, de la trop grande généralité de cette notion d'ouverts, nous supposerons que la topologie sur E est séparée : un espace séparé, dit aussi espace de Hausdorff, est un espace topologique dans lequel deux points distincts quelconques x et y admettent chacun des voisinages V_x et V_y disjoints (tous les espaces métriques le sont). On peut donc a fortiori séparer deux points distincts au moyen d'ouverts disjoints (les ouverts $O_x \subseteq V_x$ et $O_y \subseteq V_y$ qui existent par définition).

Le cas des topologies non séparées n'est peut-être pas à négliger pour la physique.

Attention au fait que la notion de voisinage n'a pas de sens en dehors de la donnée d'un point x. Autrement dit, si V est un voisinage de x, V n'est pas nécessairement un voisinage d'un $y \in V$ car il faut avoir $y \in O' \subseteq V$ pour $O' \in \mathcal{O}_E$. Par exemple dans $\mathbb{R}$, $[-1, +1]$ est un voisinage de 0 mais non de 1 car 1 n'est pas contenu dans un ouvert inclus dans $[-1, +1]$.

b) Sous-espaces

Si l'on considère une partie F d'un espace topologique E, il est commode de condidérer F comme un espace topologiques indépendant. Pour cela il suffit de dire que ses ouverts sont les intersection $O \cap F$ pour tout ouvert O de E, tout le reste s'en déduisant. On dit alors que F est un sous-espace topologique de E.

c) Fermés

Rappelons qu'une partie X de E est dite fermée si son complémentaire dans E est un ouvert ; par passage aux complémentaires on a facilement les propriétés des fermés ($\emptyset$ et E sont fermés, les réunions finies et les intersections arbitraires de fermés sont fermées).

L'adhérence $\overline{X}$ d'une partie X de E est l'intersection des parties fermées contenant X ; X est fermé si et seulement si $\overline{X} = X$; on dit qu'une partie E' de E est dense dans E si $\overline{E'} = E$ (cas de nombreux sous-groupes de $\mathbb{R}$ pour la topologie usuelle, comme on l'a vu au § 1) du chapitre V).

d) Connexité

La notion de connexité peut être particulièrement utile pour une vision un peu moins « euclidienne » de l'Univers. On dit que l'espace topologique E (donc muni d'une famille d'ouverts vérifiant les axiomes précédents § a)) n'est pas connexe s'il existe deux ouverts non vides disjoints dont l'union est E (il est équivalent de dire qu'il existe O_1 et O_2 de $\mathcal{O}_E$, non vides et distincts de E, tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et $O_1 \cup O_2 = E$). A contrario, E est connexe si pour toute paire d'ouverts O_1 et O_2 non vides disjoints, on a $O_1 \cup O_2 \neq E$. Une partie F de E est dite connexe si elle l'est comme sous-espace topologique de E.

La non-connexité est équivalente à l'existence d'une partie X de E, distincte de $\emptyset$ et E qui est à la fois ouverte et fermée comme on va le voir avec la notion de composante connexe d'un point.

En effet, l'aspect pratique se matérialise de la façon suivante : soit $x \in E$; on appelle composante connexe de x la plus grande (au sens de l'inclusion) partie connexe de E contenant x. Les composantes connexes forment une partition de E (un seul élément égal à E si E est connexe), ce qui définit une relation d'équivalence sur E (cf. b), chapitre III). Noter que si C est une composante connexe et V un voisinage (dans E) de $x \in C$, alors l'intersection $C \cap V$ est un voisinage de x dans C.

On montre facilement que C est fermée dans E, ce qui fait que l'on ne peut pas sortir de C par le procédé qui consiste, à partir de $x_0 \in C$ fixé, à considérer un voisinage V_0 de x_0 dans C et à se « déplacer en $x_1 \in V_0$, et ainsi de suite. Dès que le nombre de composantes connexes est fini, toute composantes connexe C est aussi ouverte dans E. Si l'Univers est une composante connexe, il n'a pas de « bord » en un sens, car ou bien il ressemble grosso modo à $\mathbb{R}^3$ (le bord est l'infini, peu crédible), ou bien la topologie est bornée (en un sens qui sera précisé au § 6), mais on ne saurait sortir d'un ouvert sans « discontinuité ».

2) Propriétés des espaces topologiques

Faisons quelques commentaires pratiques sur les notions précédentes.

a) Au sujet de la notion d'ouvert – Cas métrique

Pourquoi cette notion intuitive d'ouvert est-elle nécessaire à celle de voisinage ? La notion de voisinage remplace intuitivement celle de distance et on peut toujours supposer que V est un voisinage ouvert, la notion plus large de voisinage étant une commodité heuristique ; par exemple la famille la plus simple des voisinages ouverts contenant $x \in \mathbb{R}$ est formée des intervalles $]a, b[$, où $a < x < b$, a et b pouvant être $-\infty$ et $+\infty$ respectivement ; mais l'intervalle $[a, b]$ est un voisinage (non ouvert) de tout x tel que $a < x < b$, car il contient l'ouvert $]a, b[$.

La propriété essentielle de l'ouvert $]a, b[$, où $a < x < b$, est que l'on peut toujoure augmenter (ou diminuer) x d'un $\varepsilon > 0$ assez petit tout en restant dans l'ouvert $]a, b[$, ce qui n'est plus possible pour $[a, b]$ et $x = a$ par exemple.

Ceci est spécifique des toplogies définies par une distance d (topologies ou espaces métriques) auquel cas la définition d'un ouvert est justement la suivante :

$O \subseteq E$ est ouvert si et seulement si pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ assez petit tel que la boule de centre x et de rayon ε (i.e., $\{y \in E,\ d(x, y) < \varepsilon\}$) soit contenue dans O.

Si l'on est dans un espace métrique où d est à valeurs discrètes ou dans $\mathbb{Q}$ (si $\mathbb{R}$ n'est pas construit ou est indésirable), on peut toujours prendre les ε de la forme $\frac{1}{N}$ pour un entier N assez grand.

b) Au sujet de la notion d'ouvert – Cas général

Dans le cas général, peut-on bouger un peu $x \in O$ comme $x \in]a, b[$ (ce que suggère la notion de voisinage ouvert) ? C'est le cas au minimum s'il existe $y \in O$, $y \neq x$; si cette opération est impossible, cela veut dire que $O = \{x\}$ est un ouvert et dans ce cas très particulier, on dit que x est un point isolé. On conçoit alors que $\mathbb{R}$ n'a pas de points isolés, de même pour $\mathbb{Q}$, mais non pour $\mathbb{Z}$ dont tous les points sont isolés (tout cela pour la métrique usuelle d_∞). Mais dans le cas de $\mathbb{Z}$, l'aspect topologique est sans intérêt.

Précisons un peu cet aspect qui est sans ε pour une topologie quelconque.

Dans le cas de topologies non métriques (mais séparées), la représentation « physique » que l'on peut avoir de la notion d'ouvert est plus difficile car la famille d'ouverts est imposée par définition (avec ses trois axiomes). On peut déjà dire que si x appartient aux deux ouverts O_1 et O_2 alors x appartient à l'ouvert « plus petit » $O_1 \cap O_2$, mais on ne peut pas faire une intersection infinie car un ouvert *minimal* n'existe pas en général. En effet, si l'on appelle S_x l'intersection de tous les ouverts contenant x, on a le résultat suivant :

Proposition 2. *Si la topologie sur E est séparée, alors pour tout $x \in E$, l'intersection S_x de tous les ouverts contenent x est réduite au fermé $\{x\}$.*

Démonstration. Si S_x contient un point y distinct de x, l'espace étant séparé, il existe des ouverts disjoints O_x et O_y contenant x et y respectivement ; donc par définition de S_x, on a $S_x \cap O_x = S_x$ et $S_x \cap O_y = S_x$, soit $S_x \subseteq O_x \cap O_y = \emptyset$ (absurde). Donc $S_x = \{x\}$ qui est ouvert (donc ouvert et fermé) si et seulement si x est un point isolé.

A ce niveau on peut remarquer que si la famille de tous les ouverts qui contiennent $x \in E$ est finie, alors on est dans le cadre de la topologie discrète car les S_x sont ouverts. On voit ainsi que la notion d'ouvert n'aurait aucun intérêt si l'on permettait qu'une intersection quelconque d'ouverts soit dans $\mathcal{O}_E$. Mais comme on peut faire des intersections finies arbitraires, disons $S_x = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, O_i contenant x, on peut dire (si x n'est pas isolé), que l'on peut « bouger x de epsilon » en tout point $y \in S_x$ et que le « epsilon » (qui n'existe pas dans un cadre non métrique) est figuré par la finesse de la famille finie qui définit l'ouvert S_x.

c) Système fondamental de voisinages – Continuité

Donnons d'abord des définitions.

Définition 3. *(i) On appelle système fondamental de voisinages de $x \in E$ toute famille de voisinages W_x contenant x, telle que tout voisinage V de x contient un voisinage de type W_x ($x \in W_x \subseteq V$).*

(ii) Si E et F sont deux espaces topologiques et si $f : E \longrightarrow F$ est une application, on dit que f est continue en $x \in E$ (pour ces topologies) si pour tout voisinage V de $y = f(x) \in F$, il existe un voisinage U de x tel que $f(U) \subseteq V$.

(iii) Lorsque E est muni de lois d'anneau $+, \times$, on suppose que la topologie considérée, est telle que les opérations d'addition et de multiplication sont continues comme applications de $E \times E$ dans E. Autrement dit, la topologie sur E ne peut être quelconque. Il en résulte que la topologie d'anneau de E est entièrement définie par la famille des ouverts (ou voisinages) contenant 0. Si V_0 est un voisinage de 0 alors

$$V_x = x + V_0 := \{y \in E,\ \ y = x + v,\ \ v \in V\}$$

est un voisinage de x et inversement par translation. On dit alors que E est un anneau topologique.

La continuité de $+$ et $\times$ veut dire, en langage simple, la chose suivante dans le cas de $\mathbb{Q}$ (sur lequel on recherche d'autre possibilités topologiques que les classiques) :

Soient ρ et ρ' fixés dans $\mathbb{Q}$ et soit $r = \rho + \rho'$ (resp. $r = \rho\rho'$). Alors pour tout voisinage V de r il existe des voisinages U, U', de ρ et ρ', tels que $U + U' := \{x = u + u',\ u \in U,\ u' \in U'\}$ (resp. $UU' := \{x = u \times u',\ u \in U,\ u' \in U'\}$) soit contenu dans V.

Par exemple dans le cadre familier de $\mathbb{Q}$ et sa distance usuelle d_∞, si $\rho = \frac{1}{2}$ et $\rho' = \frac{3}{4}$, et si pour le produit on prend $V = \frac{3}{8} +]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$, pour trouver U et U' il suffit que

$$U = \tfrac{1}{2} +]-\tfrac{1}{N}, \tfrac{1}{N}[, \quad U' = \tfrac{3}{4} +]-\tfrac{1}{N}, \tfrac{1}{N}[,$$

pour N assez grand ; on peut prendre $N \geq 14$ au plus juste et a fortiori remplacer $\frac{1}{N}$ par tout rationnel plus petit. On vérifie que ce calcul est possible en remplaçant $\frac{1}{10}$ par n'importe quel $\varepsilon > 0$, ce qui figure le *pour tout voisinage V de $y = f(x)$* de la définition générale.

3) Limites – Entourages – suites de Cauchy

On a vu dans le cas de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, l'importance presque physique de la notion de suite de Cauchy qui permet de ne pas parler de limite lorsque l'espace n'est pas complet. Comment généraliser ce principe de base ?

a) Notion de limite en topologie générale

Dans le cas métrique, les définitions et propriétés des suites de Cauchy sont les même que pour le cas de $\mathbb{Q}$ et la construction du complété correspondant. Lorsque ce n'est pas le cas, comment procéder ? Seule subsiste la notion de limite de la façon classique suivante :

Soit E un espace topologique supposé séparé et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $\ell \in E$ est (une) limite de la suite si pour tout voisinage V_ℓ de ℓ, il existe N assez grand tel que $x_n \in V_\ell$ pour tout $n \geq N$. Dans un espace séparé, si une limite ℓ existe, elle est unique.

Mais on a vu que l'idée de limite est excessive pour la physique, car elle fait fi de l'existence même d'une limite vue comme valeur extrême infiniment précise !

b) Notion d'entourage

Dans un cadre plus concret à partir d'un ensemble non encore muni d'une topologie, la définition de suites de Cauchy dans un cadre non métrique n'est pas possible directement et oblige à introduire une structure plus riche, celle de *structure uniforme* qui repose sur celle d'entourages définis sur le produit cartésien $E \times E$ de la façon suivante :

Définition 4. *Sur un ensemble E, on appelle famille d'entourages tout ensemble non vide $\mathcal{E}$ de parties de $E \times E$ vérifiant les axiomes suivants :*

(i) Tout entourage contient la « diagonale » $\{(x, x),\ x \in E\}$.

(ii) Toute partie de $E \times E$ qui contient un entourage est un entourage.

(ii) L'intersection d'un nombre fini d'entourages est un entourage.

(iv) Pour tout $\mathcal{I} \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{I}^{\mathrm{sym}} := \{(y, x) \in E \times E,\ \ (x, y) \in \mathcal{I}\}$ est un entourage.

(v) Pour tout $\mathcal{I} \in \mathcal{E}$, il existe $\mathcal{J} \in \mathcal{E}$ tel que

$$\widehat{\mathcal{J}} := \{(x, y) \in E \times E, \quad \exists\, z \in E,\ (x, z) \in \mathcal{J}\ \&\ (z, y) \in \mathcal{J}\}$$

est un entouragecontenu dans $\mathcal{I}$.

– La diagonale est toujours contenue dans les entourages car il faut que la suite constante soit une suite de Cauchy ! Les trois axiomes suivants s'interprêtent aussi de façon « géométrique » :

– le second est une simple commodité comme pour la notion de voisinage ;

– le troisième fonctionne comme l'axiome correspondant pour les ouverts ;

– le quatrième signifie que la propriété « x_m et x_n se rapprochent », se traduisant par $(x_m, x_n) \in \mathcal{I}$, est par nature symétrique puisque l'on peut échanger m et n, et on peut le traduire par le fait que $(x_n, x_m) \in \mathcal{J}$ en prenant par exemple l'entourage symétrique $\mathcal{J} := \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^{\mathrm{sym}}$.

Le dernier axiome est essentiel pour évoquer un raprochement arbitraire ; il stipule que pour chaque entourage $\mathcal{I}$ il existe un entourage $\mathcal{J}$ qui est au plus « à moitié aussi grand » que $\mathcal{I}$. Dans le cas métrique, ceci correspond au fait que si l'entourage est de la forme :

$$\mathcal{I}_\rho := \{(x, y) \in E \times E,\ d(x, y) < \rho\},\ \rho > 0 \text{ réel},$$

on prend $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\frac{\rho}{2}}$ car de $d(x, z) < \frac{\rho}{2}$ et $d(z, y) < \frac{\rho}{2}$ on déduit $d(x, y) < d(x, z) + d(z, y) \le \rho$, donc $(x, y) \in \mathcal{I}_\rho$.

Dans le cas non métrique, ceci traduit une forme de « décroissance » des entourages qui permet justement d'affiner une suite de Cauchy sans parler de limite (qui n'a pas lieu d'exister) puisque sur un plan physique on ne souhaite pas nécessairement *compléter* l'espace, opération purement abstraite a priori, contrairement à ce que l'on fait en mathématiques.

COMMENTAIRE 35 : **En effet, notre but n'est pas de donner les bases de la topologie générale, domaine si vaste qu'on peut simplement suggérer son intérêt pour une autre vision de la réalité. On retiendra que tout procédé de complétion, destiné à donner une limite aux suites de Cauchy, donne un espace de cardinalité non dénombrable, en dehors des cas triviaux, et qu'ainsi on crée des continuum commodes pour l'analyse, la théorie de la mesure, l'intégration, etc., mais probablement abstraits.**

Une seconde difficulté est que tout ce qui précède au plan topologique est trivial si l'on ne suppose pas que l'ensemble E considéré est infini dénombrable (comme $\mathbb{Q}$), ce qui introduit une forme de contradiction qui nous force à penser qu'une réalité physique a de fortes chances d'être une « finitude évolutive » simulant le dénombrable dans le cadre thermodynamique conduisant à des quantités et objets émergents pour lesquels une notion de topologie évolutive n'est pas absurde (à condition de ne pas confondre topologie et géométrie). Ceci justifie que nous illustrerons bien des notions sur le seul ensemble $\mathbb{Q}$, a priori assez pauvre. $\square$

c) Sutes de Cauchy

Donnons simplement les définitions en usage :

Définition 5. *(i) On appelle topologie associée à l'entourage $\mathcal{E}$, la topologie pour laquelle les voisinages d'un point $x \in E$ sont de la forme $V_{x,\mathcal{I}} := \{y \in E,\ (x,y) \in \mathcal{I}\}$ pour $\mathcal{I} \in \mathcal{E}$. Les ouverts correspondants définissant la topologie sont les parties O de E telles que pour tout $x \in O$, O soit un voisinage de x (i.e., il existe $\mathcal{I} \in \mathcal{E}$ tel que $x \in V_{x,\mathcal{I}}$).*

(ii) Si E est muni d'une famille d'entourages $\mathcal{E}$, on appelle suite de Cauchy dans E toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout élément $\mathcal{I} \in \mathcal{E}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $(x_m, x_n) \in \mathcal{I}$ pour tous $m, n \geq N$.

(iii) Dans un espace métrique, lorsque toute suite de Cauchy est convergente (pour la topologie définie par d), on dit que l'espace est complet et tout ressemble au cas des espaces complets $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_p$ obtenus à partir

de $\mathbb{Q}$. Dans le cas général, le cadre est un peu plus compliqué, mais si toute suite de Cauchy est convergente, l'espace (supposé séparé) est dit séquentiellement complet et on en restera au fait que, en général, l'espace de départ peut aussi être « transporté » dans un espace complet.

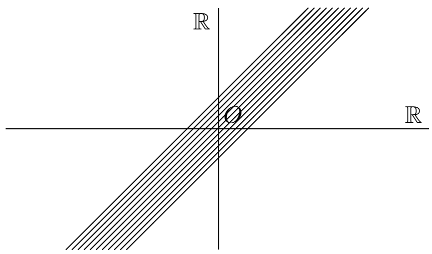
(iv) Lorsque une partie X d'un espace métrique complet E est fermée dans E et qu'en plus X est bornée (il existe un réel h tel que $d(x, y) \leq h$ pour tout $x, y \in E$, cf. 6), on dit que X est compact. Le vocabulaire est en fait plus complexe et précis dans le cadre non métrique mais nous n'en dirons pas plus et en resterons à un stade intuitif.

Remark 4. (i) Si la diagonale $\mathcal{D}$ est un entourage, $V_{x,\mathcal{D}}$ est un voisinage de x ; or $V_{x,\mathcal{D}} = \{x\}$ et la topologie est la topologie discrète, cas trivial que l'on peut écarter.

(ii) Dans le cas d'un ensemble E muni d'une distance d, les entourages sont les parties de $E \times E$ qui contiennent les $U_\rho := \{(x, y) \in E \times E,\ d(x, y) < \rho\}$ pour tout $\rho > 0$ réel. Cette définition suppose implicitement que la topologie qui s'en déduit est « séparée ».

(iii) La notion d'entourage pour une topologie non métrique peut être intéressante pour la physique dans la mesure où la notion classique de limite de suite est problématique car elle risque de ne jamais être physiquement définie (trop précis dans le cas métrique et à condition que E soit complet, donc au minimum de type $\mathbb{R}$-objet).

(iv) Dans le cas de $\mathbb{R}$ muni de la distance d_∞, un entourage a la forme ci-dessous (partie hachurée d'autant plus étroite que l'entourage est « plus petit ») qui figure l'écart $x_m - x_n$ pour tous $m, n > N$:



4) Anneaux topologiques
Cas du corps des rationnels

Les définitions suivantes semblent indispensables dans le cadre d'applications à la physique (voir 3 (iii) pour la définition d'anneau topologique) :

Définition 6. *(i) On dit qu'une partie X de l'anneau topologique E est bornée si pour tout voisinage V_0 de 0, il existe un voisinage U_0 de 0 tel que :*

$$X\,U_0 := \{y \in E,\ \ y = x\,u,\ x \in X,\ u \in U_0\} \subseteq V_0.$$

(ii) On dit que l'anneau topologique E est localement borné s'il existe un voisinage borné de 0 (i.e., un voisinage W_0 de 0 tel que pour tout voisinage V_0 de 0, il existe un voisinage U_0 de 0 tel que $W_0\,U_0 \subseteq V_0$).

Le point (i) revient à dire qu'en réduisant X par une sorte d'homothétie via U_0 (vu comme étant petit), on arrive à l'inclure dans V_0. On démontre que toute réunion finie d'ensembles bornés est bornée ; l'adhérence d'un ensembles borné est bornée ; si X et Y sont bornés, il en est de même de $X + Y$ et XY. Dans le cas d'un espace muni d'une métrique d, la définition coïncide avec celle donnée dans la Définition 4, (iv).

Le point (ii) veut dire qu'en tout point $x \in E$, il existe un voisinage borné X de x (c'est par exemple $X = x + W_0$). L'espace E n'est pas nécessairement borné (cas de $\mathbb{Q}$ pour la distance usuelle), mais en tout point il existe un voisinage ouvert borné (si $\rho \in \mathbb{Q}$, tout voisinage de la forme $\mathbb{Q} \cap\ ]\rho - \epsilon, \rho + \epsilon[$ est ainsi pour tout $\epsilon > 0$). Si par exemple $W = [-10, 10]$ et $V_0 =]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$, on aura $W\,U_0 \subseteq]-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}[$ dès que $U_0 =]-\epsilon, \epsilon[$ est contenu dans $]-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}[$.

Si E est un anneau localement borné (via W_0), pour l'ensemble des voisinages V_0 de 0, les $W_0 \cap V_0$ forment un système fondamental de voisinages bornés de 0.

De même pour $\mathbb{Q}$ muni de la norme d_p, où un système fondamental de voisinages de 0 est formé des sous-groupes $p^k\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, si l'on prend $W = \frac{1}{p^3}\mathbb{Z}$ et $V_0 = p^5\mathbb{Z}$, on aura $W\,U_0 \subseteq V_0$ dès que U_0 est contenu dans $p^8\mathbb{Z}$.

C'est le cas des anneaux topologiques $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ qui ont tous les « bonnes » propriétés classiques.

Citons le théorème suivant de M.E. Shanks et S. Warner [SW] qui clarifie le sujet :

Théorème 36. *Soit D l'ensemble des distances d sur $\mathbb{Q}$ à équivalence près (à savoir, d'après le § 3), les distances p-adiques d_p associées aux valeurs absolues $|\ \ |_p$ et la métrique usuelle d_∞ associée à la valeur absolue usuelle $|\ \ |_\infty$).*
Alors les seules topologies sur $\mathbb{Q}$, d'anneau topologique localement borné, sont les topologies de la forme $\mathcal{T}_M$ où M est une partie quelconque de D, distincte de D, et où $\mathcal{T}_M$ est définie par le système fondamental de

voisinages de 0 *de la forme* $V(\rho) := \rho\, O(M)$ *pour tout rationnel* $\rho \neq 0$, *où* $O(M) := \{x \in \mathbb{Q},\ \ d(x,0) \leq 1 \text{ pour tout } d \in M\}$ *est un voisinage borné de* 0.

Par exemple, si M est formé de d_2 et d_∞, les $x \in \mathbb{Q}$ assez proches de 0 seront de la forme $x = \dfrac{2^e \,.\, n}{m}$, n, m impairs, $e \in \mathbb{N}$ assez grand, n, m, e tels que $\left| \dfrac{2^e \,.\, n}{m} \right|_\infty$ soit assez petit (e.g. $x = \dfrac{2^{10} \,.\, 999}{1047527425}$ vérifie $|\, x\,|_2 = 2^{-10}$ et $|\, x\,|_\infty < 2^{-10}$). Plus généralement, s'il y a plusieurs métriques d_{p_i} et d_∞ il suffit de prendre $x = \dfrac{\prod_i p_i^{e_i} \,.\, n}{m}$, $e_i > 0$ assez grands, où m et n étrangers aux p_i sont ajustés (surtout m) pour avoir $|\, x\,|_\infty$ petit.

On voit que si $M = D$, on obtient la topologie discrète (toute partie $\{x\}$ réduite à un point est un ouvert et donc toute partie de E est un ouvert) ; le cas $M = \emptyset$ donne la topologie grossière où le seul ouvert non vide est $\mathbb{Q}$; elle est donc non séparée dès que E a au moins deux éléments et on peut l'éliminer.

Théorème 37. *Pour* p *premier soit* $\mathbb{Z}_p$ *l'anneau des entiers de* $\mathbb{Q}_p$ *et soit* $\mathbb{Z}_\infty := \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. *Si* $d \in D$, *on désigne par* Z_d *l'anneau correspondant* $\mathbb{Z}_p$ *ou* $\mathbb{Z}_\infty$.
(i) Soit $M \subseteq D$ *non vide et distinct de* D, *et soit*

$$A_M := \Big\{ (x_d)_{d \in M} \in \prod_{d \in M} \mathbb{Q}_d,\ \ x_p \in \mathbb{Z}_d \text{ pour presque tout } d \in M \Big\}$$

muni de la topologie suivante : le produit $\prod\limits_{d \in M} \mathbb{Z}_d$ *est par définition un voisinage borné de* 0. *Ainsi* A_M *est un anneau topologique localement compact.*
(ii) Soit $\mathbb{Q}$ *muni de la topologie* $\mathcal{T}_M$. *Alors l'application diagonale* $\delta_M : \mathbb{Q} \longrightarrow A_M$ *est un isomorphisme topologique de* $\mathbb{Q}$ *sur une partie dense de* A_M.

Le point (ii) provient du *théorème d'approximation forte* qui est une généralisation non triviale du théorème des restes chinois. Le théorème d'approximation correspond au cas où l'on prend $M = D \backslash \{d_0\}$, $d_0 \in D$ quelconque. Nous reviendrons sur ce type d'anneaux produits pour définir l'anneau des adèles qui fait appel à toutes les valeurs absolues et qui est un outil de la théorie algébrique des nombres (cf. § 7)).
On démontre également (cf. [SW]) :

Théorème 38. *Les seuls anneaux topologiques localement compacts contenant* $\mathbb{Q}$ *comme partie dense sont les anneaux* A_M, *où* M *est un sous-ensemble non vide de* D, *distinct de* D, *et où* $\mathbb{Q}$ *est muni de la topologie discrète.*

Si M est non vide et distinct de D, le complété de $\mathbb{Q}$ pour la topologie $\mathcal{T}_M$ est égal au produit direct des complétés ($\mathbb{Q}_d = \mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{R}$) de $\mathbb{Q}$ pour les $d \in M$. En outre l'injection diagonale $\delta : \mathbb{Q} \longrightarrow \prod_{d\in M} \mathbb{Q}_d$ est d'image dense pour le produit des topologies. Donc rien de bien nouveau par rapport aux complétés usuels $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ puisque le produit direct d'espaces topologiques (qui peut être utile) est l'ensemble $E = \prod_{i\in I} E_i$ où les ouverts O de E sont les produits directs des ouverts O_i (dans le cas du passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}^n$, on passe des ouverts $]a, b[$ aux ouverts $\prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ qui forment les parallélépipèdes bien connus ; le cas général est analogue).

5) Exemples de topologies exotiques non bornées sur $\mathbb{Q}$

Si les topologies métriques sont bien identifiées (conduisant aux complétions $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$ respectivement pour les distances d_p et d_∞), toute topologie n'est pas définie via une métrique (i.e., une distance ou une valeur absolue).

Il existe bien d'autres topologies d'anneau sur $\mathbb{Q}$ non équivalentes aux précédentes (ou obtenues en les combinant), et même des topologies assez « exotiques, ce qui montre que la physique peut très bien concevoir un univers où la topologie naturelle serait particulièrement contraire au sens commun influencé par la topologie métrique de $\mathbb{R}^n$. Le corps $\mathbb{Q}$ et ses topologies n'est sans doute pas un modèle réaliste pour la physique, mais il a l'avantage de montrer que même sur un ensemble banal, l'aspect topologique ne l'est pas.

Remark 5. Désignons par $\mathcal{T}_P$ la topologie obtenue en prenant pour M l'ensemble P de toutes les métriques p-adiques de $\mathbb{Q}$ (i.e., $P = D\backslash\{d_\infty\}$). On obtient donc d'après le Théorème 36 un anneau topologique localement borné dans lequel un système fondamental de voisinages de 0 est de la forme $V(\rho) := \rho\, O(P)$ pour tout rationnel $\rho \neq 0$. Dans ce cas, $O(P) = \{x \in \mathbb{Q},\ |x|_p \leq 1 \text{ pour tout } p \in P\}$, ce qui caractérise $\mathbb{Z}$; par conséquent un système de voisinages de 0 est constitué des $V(\rho) := \rho\,\mathbb{Z}$, pour tout rationnel $\rho \neq 0$.

On sait que les sous-groupes G de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $a\,\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$, mais ceci n'est plus vrai pour les sous-groupes G de $\mathbb{Q}$ sauf si G est de type fini (i.e., engendré par un nombre fini de rationnels), auquel cas $\rho_1\mathbb{Z} + \cdots + \rho_n\mathbb{Z} = \rho\mathbb{Z}$ pour un rationnel ρ convenable (simple relation de Bézout généralisée sur les ρ_i). Ce n'est plus nécessairement vrai s'il y a une infinité de générateurs, mais c'est sans importance car alors G est une réunion (finie ou infinie) de $\rho_i\mathbb{Z}$ qui sont des voisinages ouverts. Ainsi tout sous-groupe non nul de $\mathbb{Q}$ est ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_P$.

On démontre que $\mathcal{T}_P$ est non archimédienne, non discrète, localement bornée, et maximale (i.e., toute topologie $\mathcal{T}'$ du même type,telle que toute partie de $\mathbb{Q}$ ouverte pour $\mathcal{T}_P$ est ouverte pour $\mathcal{T}'$, coïncide avec $\mathcal{T}_P$).

Le résultat suivant provient de plusieurs articles, dont [Sh], après une première construction par A.F. Mutylin :

Théorème 39. *Il existe sur $\mathbb{Q}$ des topologies de corps non triviales $\widehat{\mathcal{T}}$, non équivalentes à la topologie discrète, à la topologies archimédienne, aux topologies p-adiques, et à celles qui s'en déduisent par le Théorème 36, et telles que $\widehat{\mathcal{T}} > \mathcal{T}_P$ (i.e., il existe des parties ouvertes de $\mathcal{T}_P$ qui ne sont pas ouvertes dans $\widehat{\mathcal{T}}$).*

On peut donner une telle construction de la façon suivante (d'après [Sh]) :

Soient $a_1 \geq 2, \ldots, a_n, \ldots$ des entiers positifs vérifiant les conditions suivantes pour tout n :

(i) $n! \mid a_n$;

(ii) $a_n \mid a_{n+1}$;

(iii) $a_{n+1} > (2na_n + 1)^{2^{n+1}}$.

On définit pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$V_{r,n} = \big\{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv a \pmod{2\,a_n}, \quad \text{pour un } a \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |a| < (2\,a_n - 1)^{2^{-r}}\big\},$$

$$V_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_{r,n}.$$

Alors l'ensemble des $m\,V_r$, $r, m \in \mathbb{N}$, est un système fondamental de voisinages de 0 qui définit un exemple de topologie donnée par le Théorème.

On notera que pour cette topologie, la suite $(a_m)_m$ tend vers 0 ; en effet, si r est fixé, $(2\,a_n - 1)^{2^{-r}}$ tend vers l'infini avec n. Donc pour m fixé, $x = a_m$ vérifie $x \equiv a_m \pmod{2a_n}$ pour tout n assez grand. Donc $x \in V_{r,n}$ pour tout n assez grand et $x \in V_r$.

6) Construction du compactifié *p*-adique de $\mathbb{R}$

Généralisations

Dans le même ordre d'idées, puisque Matti Pitkänen évoque des objets comportant des parties réelles et p-adiques (cf. a)), citons à titre d'exemple basique l'existence du « compactifié p-adique de $\mathbb{R}$ » ou « solénoïde p-adique ».

a) Définitions

Dans [Jau] J-F. Jaulent a donné la construction arithmétique suivante sous forme de groupe quotient, principe d'avantage susceptible de généralisations pour la physique (nous y reviendrons) qui donne une preuve d'« existence » (non unicité matérielle car le solénoïde p-adique est en général défini autrement, mais unicité intellectuelle) :

Définition 7. *Considérons le produit cartésien $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$, où $\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la distance p-adique, et $\mathbb{R}$ le groupe des nombres réels habituels.*

On désigne par $\mathcal{Z} := \delta(\mathbb{Z}[1/p])$ l'image, par le plongement diagonal δ, du sous-groupe additif $\mathbb{Z}[1/p]$ de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels entiers en dehors de p (i.e., de la forme $\omega = \frac{e}{p^n}$, $e \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) ; ainsi $\delta\big(\frac{e}{p^n}\big) = \big(\frac{e}{p^n}, \frac{e}{p^n}\big)$, où chaque composante est vue respectivement dans $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{R}$.

On appelle compactifié p-adique de $\mathbb{R}$ le groupe additif :

$$\mathbb{S}_p = (\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R})/\mathcal{Z}.$$

On peut considérer cet objet comme une version localisée du cas du groupe des adèles de $\mathbb{Q}$ (cf. § 7)) pour lequel on remplace $\mathbb{Z}[1/p]$ par son analogue prenant en compte tous les nombres premiers q, à savoir $\mathbb{Z}[\ldots, 1/q, \ldots] = \mathbb{Q}$.

On écrira donc les éléments de $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$ sous forme de couples (α, ρ), $\alpha \in \mathbb{Q}_p$, $\rho \in \mathbb{R}$, et leurs classes $x \in \mathbb{S}_p$ sous la forme $x = (\alpha, \rho) + \mathcal{Z}$.

La relation d'équivalence est donc définie, pour $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Q}_p$, $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$, par $(\alpha, \rho) \sim (\alpha', \rho')$ si et seulement si il existe $e \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\alpha' - \alpha = \frac{e}{p^n} \;\text{ et }\; \rho' - \rho = \frac{e}{p^n}.$$

Désignons par $\mathbb{Z}_p$ le sous-groupe de $\mathbb{Q}_p$ des entiers p-adiques, formé des $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ de valuation positive ou nulle ; $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$ pour la métrique p-adique, et ses éléments s'écrivent de façon unique $\gamma = a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + \cdots + a_i\, p^i + \cdots$, avec $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ (cf. § 31).

Par conséquent, les éléments de $\mathbb{Q}_p$ s'écrivent de façon unique $\alpha = \gamma + \frac{r}{p^n}$, avec $\gamma \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < p^n$, et p.g.c.d. $(r, p^n) = 1$ [1] (si $\alpha = \gamma + \frac{e}{p^n}$, $e \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, et p.g.c.d. $(e, p^n) = 1$, par division euclidienne de e par p^n, avec reste positif ou nul, on obtient $e = q\,p^n + r$, ce qui conduit à $\frac{e}{p^n} = q + \frac{r}{p^n}$ et $\alpha = \gamma + q + \frac{r}{p^n}$ qui est bien de la forme voulue puisque $\gamma + q \in \mathbb{Z}_p$.

On fera attention aux questions de signes dans $\mathbb{Q}_p$: en effet, on a :

$$-1 = p-1+(p-1)\,p+(p-1)\,p^2+\cdots+(p-1)\,p^i+\cdots\ , \ \text{ et } \ \frac{-1}{p^n} = \frac{p^n-1}{p^n}-1,$$

qui permet de revenir si nécessaire à la forme canonique.

On remarque que tout élément ω de $\mathbb{Z}[1/p]$ s'écrit de façon unique $\omega = q + \frac{r}{p^n}$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < p^n$, et p.g.c.d. $(r, p^n) = 1$. Autrement dit, si l'on pose $[0, 1[_p := [0, 1[\cap \mathbb{Z}[1/p]$, on a :

$$\mathbb{Z}[1/p] = \mathbb{Z} \bigoplus [0, 1[_p,$$

à comparer à la décomposition ci-dessus $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p \oplus [0, 1[_p$ et à la décomposition évidente $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \oplus [0, 1[$, où dans ces écritures, le symbole $\oplus$ n'indique pas une somme directe de groupes additifs ($[0, 1[$ et $[0, 1[_p$ ne sont pas des sous-groupes de $\mathbb{R}$), mais seulement l'existence d'une décomposition unique sur chacune des deux composantes.

Enfin il va être fondamental de voir que la composante $\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ pour la topologie p-adique et que la composante $[0, 1[_p = \Big\{\frac{r}{p^n},\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < p^n,\ \text{p.g.c.d.}\,(r, p^n) = 1\Big\}$ est dense dans $[0, 1[$ pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

b) Propriétés du solénoïde *p*-adique

Les principales propriétés sont les suivantes :

(i) Tout $x \in \mathbb{S}_p$ peut s'écrire de façon unique (forme canonique d'un représentant (γ, ε) de x) :

$$x = (\gamma, \varepsilon) + \mathcal{Z}, \text{ avec } \gamma \in \mathbb{Z}_p \text{ et } \varepsilon \in [0, 1[,$$

Autrement dit ([Jau], Th. 2) :

$$\mathbb{S}_p = \mathbb{Z}_p \times [0, 1[+ \ \mathcal{Z},$$

(1) On rappelle que si $r = 0$, la condition p.g.c.d. $(r, p^n) = 1$ est équivalente à $n = 0$, et que p.g.c.d. $(0, 1) = 1$.

ceci n'étant pas une écriture de produit direct de groupes (l'addition n'est pas stable dans $[0,1[$), la loi de groupe sur $\mathbb{Z}_p \times [0,1[+\mathcal{Z}$ étant ainsi définie :

Si $x = (\gamma, \varepsilon) + \mathcal{Z}$, $y = (\gamma', \varepsilon') + \mathcal{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} x + y &= (\gamma + \gamma', \varepsilon + \varepsilon') + \mathcal{Z} \\ &= (\gamma + \gamma' - \mathrm{E}(\varepsilon + \varepsilon'), \varepsilon + \varepsilon' - \mathrm{E}(\varepsilon + \varepsilon')) + \mathcal{Z} \in \mathbb{Z}_p \times [0,1[\, + \ \mathcal{Z}, \end{aligned}$$

où pour un réel ρ, $\mathrm{E}(\rho)$ désigne la partie entière au sens usuel. Un tel ensemble $\mathbb{Z}_p \times [0,1[$ de représentants des classes (non unique) s'appelle un domaine fondamental pour $\mathbb{S}_p$.

Montrons l'existence. Si $(\alpha, \rho) \in \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$, $\alpha = \gamma + \frac{e}{p^n}$, $\gamma \in \mathbb{Z}_p$, $e \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} (\alpha, \rho) &= \Big(\gamma + \tfrac{e}{p^n}, \rho\Big) \sim \Big(\gamma + \tfrac{e}{p^n} - \tfrac{e}{p^n}, \rho - \tfrac{e}{p^n}\Big) = \Big(\gamma, \rho - \tfrac{e}{p^n}\Big) \\ &= \Big(\gamma, \mathrm{E}\Big(\rho - \tfrac{e}{p^n}\Big) + \varepsilon'\Big) \sim \Big(\gamma - \mathrm{E}\Big(\rho - \tfrac{e}{p^n}\Big), \varepsilon'\Big) \\ &= (\gamma', \varepsilon'), \quad \text{où } \gamma' \in \mathbb{Z}_p \text{ et } \varepsilon' \in [0,1[. \end{aligned}$$

Montrons l'unicité. Si $(\gamma, \varepsilon) \sim (\gamma', \varepsilon')$, il existe $\frac{e}{p^n} \in \mathbb{Z}[1/p]$ tel que $\gamma' - \gamma = \frac{e}{p^n}$ et $\varepsilon' - \varepsilon = \frac{e}{p^n}$; comme il en résulte $\frac{e}{p^n} \in \mathbb{Z}_p$, on a $\frac{e}{p^n} = e' \in \mathbb{Z}$, puis $\varepsilon' - \varepsilon = e' \in]-1, 1[$, d'où $e' = 0$.

(ii) Le groupe $\mathbb{S}_p$ contient, comme sous-groupes, à la fois un groupe $\mathbb{Q}'_p$ isomorphe à $\mathbb{Q}_p$ et un groupe $\mathbb{R}'$ isomorphe à $\mathbb{R}$. En effet, il suffit de prendre les images respectives de $\mathbb{Q}_p \times \{0\}$ et de $\{0\} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}_p$, à savoir :[2]

$$\mathbb{Q}'_p = \mathbb{Q}_p \times \{0\} + \mathcal{Z} \text{ et } \mathbb{R}' = \{0\} \times \mathbb{R} + \mathcal{Z}.$$

On a alors les décompositions directes suivantes (avec la règle d'addition déjà indiquée) :

$$\mathbb{Q}'_p = \mathbb{Z}_p \times [0,1[_p + \ \mathcal{Z} \ \text{ et } \ \mathbb{R}' = \mathbb{Z} \times [0,1[\, + \ \mathcal{Z},$$

où l'on rappelle que $[0,1[_p$ est l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{r}{p^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le r < p^n$, p.g.c.d. $(r, p^n) = 1$. En effet :

– Un élément α de $\mathbb{Q}_p$ s'écrit $\alpha = \gamma + \frac{r}{p^n}$ avec $\gamma \in \mathbb{Z}_p$ et $\frac{r}{p^n} \in [0,1[_p$. Donc $\big(\alpha, 0\big) = \big(\gamma + \frac{r}{p^n}, 0\big)$ et on écrit (si $r \neq 0$) :

(2) Les notations $\mathbb{Q}'_p$, $\mathbb{R}'$ ne sont pas à confondre avec les notations $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$ définissant $\mathbb{S}_p$; en effet, $\mathbb{Q}'_p$ et $\mathbb{R}'$ sont des ensembles de classes de couples.

$$\big(\gamma+\frac{r}{p^n},0\big) \sim \big(\gamma+1-\frac{p^n-r}{p^n},0\big) \sim \big(\gamma+1,\frac{p^n-r}{p^n}\big) = \big(\gamma',\frac{r'}{p^n}\big) \in \mathbb{Z}_p\times[0,1[_p + \mathcal{Z}.$$

– Un élément $\rho \in \mathbb{R}$ s'écrit $\rho = \mathrm{E}(\rho)+\varepsilon$, $\varepsilon \in [0,1[$, auquel cas :

$$\big(0,\rho\big) = \big(0,\mathrm{E}(\rho)+\varepsilon\big) \sim \big(-\mathrm{E}(\rho),\varepsilon\big) \in \mathbb{Z}\times[0,1[+\mathcal{Z}.$$

En outre, les écritures des représentants sur $\mathbb{Z}_p\times[0,1[_p$ et $\mathbb{Z}\times[0,1[$ sont uniques.

(iii) Le groupe $\mathbb{S}_p$ est un espace métrique sur lequel il existe une valeur absolue $\|\ \|$ définie, pour $x=(\gamma,\varepsilon)+\mathcal{Z}\in\mathbb{S}_p$, $\gamma\in\mathbb{Z}_p$, et $\varepsilon\in[0,1[$, de la façon suivante (à partir du représentant canonique $(\gamma,\varepsilon)\in\mathbb{Z}_p\times[0,1[$ de x) :
On veut déjà que $\|x\|=\|-x\|$. Si $x=(\gamma,\varepsilon)+\mathcal{Z}$, $-x=(-\gamma,-\varepsilon)+\mathcal{Z}=(1-\gamma,1-\varepsilon)+\mathcal{Z}\in\mathbb{Z}_p\times[0,1[+\mathcal{Z}$ (pour $\varepsilon\neq 0$). Ceci conduit à poser :

$$\|x\| = \min\Big(\max\big(\big|\,\gamma\,\big|_p,\big|\,\varepsilon\,\big|_\infty\big),\max\big(\big|\,1-\gamma\,\big|_p,\big|\,1-\varepsilon\,\big|_\infty\big)\Big),$$

où $\big|\ \ \big|_p$ est la valeur absolue p-adique et $\big|\ \ \big|_\infty$ la valeur absolue usuelle.
Par exemple, si $\varepsilon=0$ (i.e., $x\in\mathbb{Z}'_p:=\mathbb{Z}_p\times\{0\}+\mathcal{Z}$),

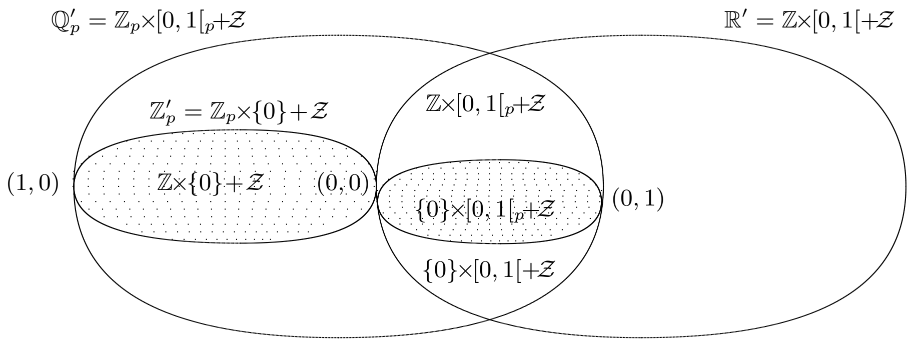
$$\|x\| = \min\Big(\max\big(\big|\,\gamma\,\big|_p,0\big),\max\big(\big|\,1-\gamma\,\big|_p,1\Big) = \min\Big(\big|\,\gamma\,\big|_p,1\Big) = \big|\,\gamma\,\big|_p,$$

puisque $\big|\,\gamma\,\big|_p\in\Big\{1,\frac{1}{p},\dots\Big(\frac{1}{p}\Big)^m,\dots\Big\}$, et $\|\ \|$ coïncide avec $\big|\ \ \big|_p$.
Si $\gamma=0$ (i.e., $x\in[0,1['\!:=\{0\}\times[0,1[+\mathcal{Z}$),

$$\|x\| = \min\Big(\max\big(0,\big|\,\varepsilon\,\big|_\infty\big),\max\big(1,\big|\,1-\varepsilon\,\big|_\infty\Big) = \min\Big(\big|\,\varepsilon\,\big|_\infty,1\Big) = \big|\,\varepsilon\,\big|_\infty$$

et $\|\ \|$ coïncide avec $\big|\ \ \big|_\infty$.
La distance associée à $\|\ \|$ est à valeurs dans $[0,1]$ et est invariante par translation.

Il est difficile de se représenter le solénoïde p-adique sous ses aspects algébriques et topologiques ; nous donnons ci-dessous une figure ensembliste peu convaincante.



En particulier, le nuage de points au centre, $\{0\} \times [0,1[_p{+}\mathcal{Z}$, est un sous-groupe de $\mathbb{Q}'_p \cap \mathbb{R}'$ dense (pour la topologie réelle) dans le petit ovale au centre $\{0\} \times [0,1[{+}\mathcal{Z}$, lequel est un sous-groupe du continuum réel $\mathbb{R}'$ qui n'est pas entièrement dans $\mathbb{Z} \times [0,1[_p{+}\mathcal{Z}$ (son intersection avec $\mathbb{Q}'_p$ est précisément $\{0\} \times [0,1[_p{+}\mathcal{Z}$).

Le nuage de points $\mathbb{Z} \times \{0\} + \mathcal{Z}$ à gauche est un sous-groupe de $\mathbb{R}'$ dense (pour la topologie p-adique) dans le petit ovale de gauche $\mathbb{Z}'_p$.

L'intersection de $\mathbb{R}'$ et de $\mathbb{Q}'_p$ est $\mathbb{Z} \times [0,1[_p{+}\mathcal{Z} = \mathbb{Z}[1/p] \times \mathbb{Z}[1/p]$.

Les points $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, sont les représentants canoniques des classes correspondantes.

La valeur absolue définie plus haut a une existence globale, ce qui explique qu'elle soit bornée ($\mathbb{S}_p$ est alors compact) et sans doute inappropriée. Mais si l'on se place dans $\mathbb{R}'$, on peut tout à fait utiliser localement la valeur absolue $|\ |_\infty$ (pour $x = (q,\varepsilon){+}\mathcal{Z} \in \mathbb{Z}{\times}[0,1[{+}\mathcal{Z}$, on aura $|\,x\,|_\infty = |\,q{+}\varepsilon\,|_\infty$ puisque (q,ε) est la représentation canonique du réel $\rho = E(\rho){+}\varepsilon =: q{+}\varepsilon$. Ceci est encore possible dans $\mathbb{R}' \cap \mathbb{Q}'_p = \mathbb{Z} \times [0,1[_p{+}\mathcal{Z}$ qui est donc formé de classes y de rationnels de la forme $q + \frac{r}{p^n}$, $q \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le r < p^n$, p.g.c.d. $(r,p^n) = 1$, mais avec une « incompatibilité croissante » avec la valeur absolue $|\ |_p$ sur $\mathbb{Q}'_p$ puisque par exemple (en supposant $q > 0$, n grand, ce qui implique $r > 0$) :

$$\left|\, q + \frac{r}{p^n} \,\right|_\infty = \frac{q\,p^n + r}{p^n} \quad \text{et} \quad \left|\, q + \frac{r}{p^n} \,\right|_p = \left|\, \frac{q\,p^n + r}{p^n} \,\right|_p = p^n,$$

qui ne sont proches que pour q proche de p^n et r pas trop grand. Par exemple, $q = p^n$, $r = 1$, donne une différence en $\frac{1}{p^n}$.

La notion de distance «archimédienne» en physique étant a priori un non-sens dans certaines « régions quantiques », le modèle ci-dessus fournit un procédé de transition de l'archimédien vers l'ultramétrique, sous réserve d'interpréter la partie $\mathbb{R}'$ comme la partie cosmologique et la partie $\mathbb{Q}'_p$ comme la partie quantique autour du point $(0,0)$ de ce modèle naïf.

Il est alors normal que l'« infiniement petit » dans le cadre de notre perception de $\mathbb{R}'$ soit ici la partie « discrète » $\{0\} \times [0, \eta[_p + \mathcal{Z}$ de $\{0\} \times [0, \eta[+\mathcal{Z}$, η très proche de 0, laquelle est bien dans le cadre ultramétrique. De grandes valeurs absolues dans $\mathbb{R}'$ sont obtenues pour les éléments de $\{N\} \times [0, \eta[+\mathcal{Z}$, N grand, qui sont les translatés, par $\mathbb{Z}$, des petits voisinages $\{0\} \times [0, \eta[_p + \mathcal{Z}$ précédents, à savoir (modulo $\mathcal{Z}$) :

$$\{0\}\times[0,\eta[_p,\ \ \{1\}\times[0,\eta[_p,\ \ \{2\}\times[0,\eta[_p,\ \ldots,\ \{N\}\times[0,\eta[_p,\ \ \{0\}\times[0,\eta[_p,\ \ldots,$$

ce qui transporte «loin» et localement l'ultramétricité ; par exemple, pour $x = (N, \varepsilon) + \mathcal{Z}$, avec N grand, $\varepsilon = \frac{r}{p^n} < \alpha$, on a $N < \left| N + \frac{r}{p^n} \right|_\infty < N + \alpha$ tandis que localement on a $\left| N + \frac{r}{p^n} \right|_p = p^n$ qui est grand puisque la condition $\frac{r}{p^n} < \eta$ implique n grand.

Au-delà des questions de «longueurs», on sait que la géométrie se modifie de façon radicale au niveau ultramétrique ; par exemple un voisinage de $x = \left(N, \frac{r}{p^n}\right) + \mathcal{Z}$ peut s'écrire :

$$V = \Big\{ y = (\gamma, \varepsilon_p) + \mathcal{Z} \in \mathbb{Q}'_p,\ \ \Big| y - x \Big|_p = \Big| \gamma - N + \varepsilon_p - \frac{r}{p^n} \Big|_p < p^m \Big\},$$

pour $\gamma \in \mathbb{Z}_p$, $\varepsilon_p \in [0, 1[_p$, ce qui implique $\varepsilon_p = \frac{r}{p^n}$ et $\gamma \equiv N \pmod{p^m}$, et donne les solutions $y_\lambda = \left(N + \lambda\, p^m, \frac{r}{p^n}\right) + \mathcal{Z}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, qui ramène à des $\lambda \in \mathbb{Z}$ si l'on veut rester dans un cadre discret ($\mathbb{Z}_p$ ayant la puissance du continu).

L'étrangeté est alors que les éléments y_λ sont « de plus en plus éloignés » de x au sens archimédien ! Une propriété de non-localité en quelque sorte.

(iv) Autres propriétés du groupe topologique $\mathbb{S}_p$. Citons sans démonstration les propriétés suivantes :

- Le groupe $\mathbb{S}_p$ est un groupe divisible ([Jau], Déf. 1).
- On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}_p = p^m \mathbb{Z}_p \times [0, p^m[+\mathcal{Z}$ ([Jau], Cor. 4).
- Les sous-groupes $\mathbb{Q}'_p = \mathbb{Q}_p \times \{0\} + \mathcal{Z}$ et $\mathbb{R}' = \{0\} \times \mathbb{R} + \mathcal{Z}$ sont denses dans $\mathbb{S}_p$ pour la topologie de $\|\ \|$ ([Jau], Th. 6).
- Le groupe $\mathbb{S}_p$ est compact et connexe pour la topologie de $\|\ \|$ ([Jau], Th. 7).
- Le groupe $\mathbb{S}_p$ admet une mesure de Haar μ (de masse 1) pour laquelle, pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $u, v \in [0, 1[$, $\mu(p^m\, \mathbb{Z}_p \times [u, v] + \mathcal{Z}) = p^{-m} . (v - u)$ ([Jau], Cor. 8).
- La définition classique du solénoïde p-adique (cf. [HM]) est la suivante, en termes de suites, où $U = \{z \in \mathbb{C}^\times,\ |\, z\,|_\infty = 1\}$:

$$\mathbb{S}_p = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}},\ x_n = x_{n+1}^p \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Pour d'autres propriétés du solénoïde p-adique voir [Jau], §§ 3, 4 ; pour l'étude des relations avec la définition classique du solénoïde p-adique, voir [Jau], § 5.

c) Conclusion

Le solénoïde p-adique apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques sur $\mathbb{R}^3$ et est à ce titre un objet intéressant, mais pour quels p ? il est sans doute nécessaire d'en obtenir des généralisation susceptibles d'être utiles en physique en gardant à l'esprit que la question des cardinalités est inchangée par rapport à celle des $\mathbb{R}$-objets usuels (cf. § 5)). Ce problème de cardinalités n'admet pas de solution évidente et nos objets ayant la puissance du continu ne peuvent se substituer à une quelconque réalité plus « profonde » que le modèle mathématique.

La construction de Jaulent, plus arithmétique que géométrico-analytique, est cependant plus proche d'une sorte d'espace «réel» combinant plusieurs métriques de façon non artificielle, et pouvant être utilisé (convenablement généralisé) comme modèle de pensée pour une autre axiomatisation de l'espace physique.

Dans un premier temps, on peut facilement généraliser la notion de solénoïde p-adique à celle de solénoïde multi-adique en remplaçant $\mathbb{Q}_p$ par un produit fini $\prod_{i=1}^n \mathbb{Q}_{p_i}$, ce qui donne $\mathbb{S}_{p_1,\ldots,p_n} = \Big(\prod\limits_{i=1}^n \mathbb{Q}_{p_i} \times \mathbb{R}\Big)\Big/\mathcal{Z}$, où $\mathcal{Z} := \delta\big(\mathbb{Z}\big[\frac{1}{p_1},\ \cdots,\ \frac{1}{p_n}\big]\big)$ est l'image, par le plongement diagonal δ, du sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ formé des rationnels entiers en dehors des p_i, $i = 1, \ldots, n$. Il resterait à en faire une étude analogue à celle du cas $n = 1$, notamment au plan métrique. On a de même :

$$\mathbb{S}_{p_1,\ldots,p_n} = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p_i} \times [0,1[\ + \mathcal{Z}.$$

7) Adèles et idèles

Ceci dit, on peut donc être conduit à considérer des structures utilisant tous les nombres premiers et plus précisement toutes les complétions de $\mathbb{Q}$, auquel cas l'un des objets canoniques est le sous-anneau de l'anneau topologique produit $\prod\limits_{p\,\text{premier}} \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$, formé des $(\ldots, x_p, \ldots, x_\infty)$ tels que $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf un nombre fini et $x_\infty \in \mathbb{R}$. On note ce sous-anneau (produit restreint) :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \prod_{p\,\text{premier}}^{\text{res}} \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$$

qui est appelé l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$. Le sous-anneau des entiers de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ est par définition $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}} = \prod_{p\,\text{premier}} \mathbb{Z}_p \times \mathbb{R}$. Des variantes sur la composante $\mathbb{R}$ sont possibles en remplaçant celle-ci par un sous-anneau.

On peut alors considérer l'analogue de $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{p_1},\ \cdots,\ \frac{1}{p_n}\big]$ dans ce cadre, qui n'est autre que $\mathbb{Z}\big[\cdots,\ \frac{1}{p},\ \cdots\big] = \mathbb{Q}$ dont le plongement diagonal $\mathcal{Z} := \delta(\mathbb{Q})$ est bien contenu dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ (si $\rho = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, son image diagonale dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ est la famille $(\ldots, x_p, \ldots, x_\infty) = (\ldots, \rho, \ldots, \rho)$ qui est bien telle que $\rho \in \mathbb{Z}_p$ pour tout p sauf un nombre fini puisque le rationnel ρ n'est pas dans $\mathbb{Z}_p$ que pour les p qui divisent le dénominateur b). On a donc obtenu l'objet :

$$\mathbb{S}_\infty := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\delta(\mathbb{Q}),$$

qu'on appelera aussi le groups des classes d'adèles. On démontre que l'on a toujours l'écriture :

$$\mathbb{S}_\infty := \prod_{p\,\text{premier}} \mathbb{Z}_p \times [0,1[\ +\delta(\mathbb{Q}).$$

Ces structures additives généralisent donc les structures de type solénoïde ; elles possèdent un analogue multiplicatif digne d'intérêt qui est donné par le groupe multiplicatif suivant :

$$\mathbb{J}_{\mathbb{Q}} \ := \prod_{p\,\text{premier}}^{\text{res}} \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{R}^\times,$$

restreint aux familles dont les p-composantes sont presque toutes de p-valuations nulles, est le groupe des idèles de $\mathbb{Q}$ (on peut également remplacer $\mathbb{R}^\times$ par le sous-groupe $\{\pm 1\}$). De la même façon on considère le groupe des classes d'idèles $\mathbb{J}_{\mathbb{Q}}/\delta(\mathbb{Q}^\times)$, qui intervient pour la théorie du corps de classes sur $\mathbb{Q}$, mais aussi dans la théorie des systèmes dynamiques. [3]

L'interêt de ces structures est que l'objet qui leur est associé est le quotient par l'image diagonale de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}^\times$), auquel cas l'image de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Q}^\times$) dans $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbb{J}_{\mathbb{Q}}$) est un sous-groupe discret pour la topologie produit, et le quotient $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{J}_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^\times$) est compact.

Notons que le contexte p-adique est naturellement associé au corps fini $\mathbb{F}_p$ et ses extensions $\mathbb{F}_{p^n}$. Voir aussi le § b) du chapitre V pour la notion de principe local-global, consubstantiel à ces topologies, et qui peut suggérer des approches différentes.

---

(3) Bost, J-B. and Connes, A. , *Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*, Selecta Mathematica (1995), New Series 1 (3), 411–457.

Chapitre X

Vocabulaire de la physique fondamentale

Nous rappelons de manière imparfaite [1], dans les cinq sous-paragraphes suivants, les différents « postulats » (interprétation de Copenhague), principes, et paradoxes de la mécanique quantique ainsi que quelques conséquences en nous limitant à celles qui posent les problèmes les plus cruciaux pour la confrontation logique entre physique et mathématique.

Il n'est pas question d'imiter les (très) nombreux et excellents ouvrages de vulgarisation ou de niveau recherche, mais de mettre en évidence leurs points communs, sur l'utilisation des mathématiques, dans le cadre de notre objectif. Citons auparavant quelques extraits d'un texte que l'on peut trouver dans : Bernard d'Espagnat [2] qui précise le propos sans remettre en cause notre démarche et les idées développées dans notre analyse, bien au contraire puisqu'il met en doute, les notions de «mesure» et même de «mesurabilité» en physique :

La description statistique des phénomènes atomiques et nucléaires doit-elle être considérée comme un « expédient provisoire qu'il faudrait en principe remplacer par une description déterministe » ? Ou est-elle au contraire une conséquence de« l'interaction inévitable entre objets et appareils de mesure », auquel cas le déterminisme n'a pas de sens quand l'action observée est de l'ordre de grandeur du quantum ? Dans la première hypothèse, les« relations d'incertitude » de Heisenberg n'imposent une limite théorique qu'à notre connaissance des faits. Dans la seconde, elles se réfèrent, au contraire, à une limitation concernant la validité même de certaines notions telles que la position et la vitesse.

L'école de Copenhague, animée principalement par Niels Bohr et Werner Heisenberg, défendit la seconde de ces deux conceptions, que, pour des raisons de cohérence, elle fut amenée à préciser comme suit : les propriétés des systèmes atomiques ou nucléaires ne leur appartiennent pas en propre

(1) L'auteur n'est pas physicien et demande la plus grande indulgence à ce sujet.
(2) http://www.universalis.fr/encyclopedie/ecole-de-copenhague, par Bernard d'Espagnat.

et dépendent des conditions d'observation définies, en particulier par les instruments de mesure. Utilisés comme tels, ceux-ci doivent être décrits exclusivement dans le langage de la physique préquantique (...).

Les réticences à l'égard de l'interprétation de l'école de Copenhague proviennent des physiciens attachés au déterminisme et, plus généralement de ceux qui considèrent comme difficilement acceptable le fait que cette conception nous interdit d'attribuer par la pensée aux particules atomiques certaines propriétés intrinsèques (position ou vitesse, etc.) reliées par la mécanique quantique aux observables qu'il est possible de mesurer sur ces systèmes.

COMMENTAIRE 40 : **Autrement dit,** *les physiciens attachés au déterminisme (...)* **qu'évoque Bernard d'Espagnat seraient les tenants de la mathématisation naïve qui considère tout objet physique comme un $\mathbb{R}$-objet et l'idée de mesurabilité qui va avec. Or il semble que la notion de déterminisme soit beaucoup plus large logiquement. Tout le problème étant de savoir si, sur un plan plus axiomatique, on peut rendre compatibles les « relations d'incertitude probabilistes » vues comme limitations de la connaissance (ou comme manifestation de l'incompatibilité de la représentation de type $\mathbb{R}$-objet) et un « déterminisme », mathématisable (ou non) dans un cadre moins naïf comme celui vu au Chapitre VII de façon très superficielle.** □

Cette interprétation exige en effet que de telles propriétés ne soient attribuables aux microsystèmes que par convention et seulement lorsque le cadre expérimental complet a été bien défini. En d'autres termes, les microsystèmes constituent avec les instruments, et en particulier avec les instruments de mesure, un tout indivisible. C'est alors le dispositif expérimental qui détermine, parmi les grandeurs physiques pouvant être rattachées au microsystème étudié, celles auxquelles il est possible, sans contradiction, d'attribuer par la pensée une valeur bien définie, alors même que cette valeur est encore inconnue. Cela semble à certains d'autant moins acceptable que la notion d'instrument est elle-même macroscopique et paraît, en outre, n'avoir de sens que par référence à un utilisateur humain.

Quelle que soit l'importance que l'on accorde à ces objections, on doit reconnaître que la mécanique quantique est à la fois plus simple et plus féconde lorsqu'on lui applique l'interprétation probabiliste mise en lumière par l'école de Copenhague (et également, notons-le, par d'autres physiciens, tels que E. Schrödinger et P. Dirac, qui ne se rattachent pas à cette école). C'est pourquoi la majorité des physiciens se sont ralliés à cette interprétation.

1) Les postulats de la mécanique quantique en termes d'opérateurs

Donnons-en la liste telle qu'énoncée dans [Man] ; on verra immédiatement qu'il s'agit d'analyse classique ($\mathbb{R}$-objets) et d'algèbre linéaire su $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; en outre les variables t (le temps) et r (un point de l'espace à trois dimensions) définissent implicitement un « fond » classique.

Postulat 1. *Toute particule, ou plus généralement tout système quantique, est complètement défini à l'instant t par une fonction complexe $\Psi(r,t)$ appelée fonction d'onde. Toutes les informations accessibles concernant le système à l'instant t se déduisent de la connaissance de Ψ à cet instant.*

Postulat 2. *L'expression $P(r,t) := \Psi^*(r,t) \times \Psi(r,t)$ est la densité de probabilité de présence de la particule au point r et à l'instant t.*

Comme on doit avoir $\int P(r,t)\,\mathrm{d}r = 1$, la fonction d'onde est de carré sommable. Par ailleurs devant vérifier l'équation de Schrödinger, elle appartient à un sous-espace strict convenable $\mathcal{F}$ de $\mathbb{L}^2$ a priori de dimension infinie.

Postulat 3. *A chaque grandeur physique A (position, énergie, moment cinétique), correspond un opérateur $\widehat{A}$ agissant dans l'espace $\mathcal{F}$. Les seuls résultats de mesure possibles de la grandeur physique A sont les valeurs propres de l'opérateur $\widehat{A}$.*

Etant donné l'opérateur $\widehat{A}$, les identités $\widehat{A}\,.\,\varphi_n(t) = a_n\,\varphi_n(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ définissent les fonctions propres $\varphi_n(t)$ et les valeurs propres a_n. On écrit également $\Psi(r,t) = \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(t)$ pour tout élément de $\mathcal{F}$.

Postulat 4. *Soit un système décrit par la fonction d'onde $\Psi(r,t) = \sum_n c_n(t)\,\varphi_n(r)$. La probabilité que le résultat de la mesure de la grandeur physique A soit, à l'instant t, a_p, est $|c_p(t)|^2$.*

Postulat 5. *Si le résultat de la mesure de la grandeur physique A effectuée à l'instant t_0 sur le système décrit par la fonction d'onde $\Psi(r,t_0)$ est a_p alors, immédiatement après la mesure, la fonction d'onde n'est plus $\Psi(r,t_0)$ mais elle est égale à la fonction propre φ_p associée à a_p.*

Cela signifie que si l'on effectue une seconde mesure de A, immédiatement après la première mesure, le résultat est à coup sûr identique au premier résultat trouvé. Ce postulat est connu sous le terme de « réduction du paquet d'onde ». Avant la première mesure, la fonction d'onde était une somme pondérée de fonctions propres de $\widehat{A}$, en quelque sorte un paquet de ces fonctions propres. Après la mesure, la fonction d'onde se réduit à une seule de ces fonctions, celle correspondant au résultat de mesure.

Postulat 6. *L'évolution spatio-temporelle de la fonction d'onde obéit à l'équation:*

$$\widehat{H}.\Psi(r,t) = i\hbar \times \partial\Psi(r,t)/\partial t,$$

où $\widehat{H}$ est l'opérateur énergie.

Le sixième postulat est l'équation de Schrödinger. Cette équation est l'équation dynamique de la mécanique quantique. Elle signifie simplement que c'est l'opérateur «énergie totale» du système ou hamiltonien, qui est responsable de l'évolution du système dans le temps. En effet, la forme de l'équation montre qu'en appliquant l'hamiltonien à la fonction d'onde du système, on obtient sa dérivée par rapport au temps c'est-à-dire comment elle varie dans le temps. Cette équation n'est valable que dans le cadre non relativiste.

La définition de l'hamiltonien est la suivante :

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,(\partial^2/\partial\,x^2 + \partial^2/\partial\,y^2 + \partial^2/\partial\,z^2) + \widehat{V}(r),\ \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

où h est la constante de Planck égale à $6{,}62606957\,.\,10^{-34}$ kg.m^2.s^{-1}, m la masse, et $V(r)$ l'énergie potentielle (la matière et le rayonnement de fréquence ν ne peuvent échanger que des quantités d'énergie égales à $h\,\nu$ ou à un de ses multiples).

En particulier, l'état d'une particule quantique est déterminé par une infinité de paramètres : les valeurs aux divers points de l'espace de la fonction d'onde qui lui est associée.

2) Les particules élémentaires Modèle standard

Une particule élémentaire est une entité dont la complexité n'est probablement pas décrite de façon complète (donc difficile à mathématiser). Dans un premier temps voyons-la comme un couple (P, S), où P est un objet naïvement considéré comme une région « ponctuelle » de l'espace, et S son « spin » est vu comme une entité orientée ayant les propriétés suivantes [La], § 0.C.2 :

(i) *Pour toute direction Oz, la composante du spin sur cette direction ne peut prendre que $2\,s+1$ valeurs, où $s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (la particule peut être de spin 0, $\frac{1}{2}$, etc.).*

(ii) *Ces valeurs discrètes sont quantifiées par le quantum $\frac{1}{2}\,h$, où h est la constante de Planck.*

(iii) *Les points précédents ne dépendent pas du choix de la direction Oz.*

Commentaire 41 : **On voit, comme on l'a déjà évoqué, que le mélange de $\mathbb{R}$-objets (la direction Oz) et de phénomènes discrets est un non-sens total et que même si dans le point (i) la direction Oz est expérimentalement celle définie macroscopiquement par le gradient d'un champ magnétique (ce qui a alors globalement un sens), au niveau quantique ce n'est plus le cas, comme si la vectorialité quantique n'était définie que par une unique « direction ».** □

Revenons aux textes accessibles sur internet pour évoquer les bases du « modèle standard » :[3]

Les particules élémentaires sont les constituants fondamentaux de l'Univers décrits par le « modèle standard de la physique des particules ». Ces particules subatomiques sont dites « élémentaires » parce qu'elles ne résultent pas de l'interaction d'autres particules plus « petites ». Un atome n'est pas une particule élémentaire car il est constitué d'électrons, de protons et de neutrons. Ces deux derniers, désignés par le terme générique, nucléons, car formant le noyau atomique, ne sont pas non plus élémentaires car ils sont constitués de quarks. En revanche, électrons et quarks sont des particules élémentaires car ils ne sont constitués d'aucune autre particule, d'après l'état actuel des connaissances.

On distingue les particules élémentaires qui ont un spin demi-entier et obéissent à la statistique de Fermi-Dirac et au principe d'exclusion de Pauli, et celles qui ont un spin entier et obéissent à la statistique de Bose-Einstein :

Les premières sont appelées fermions[4] *et constituent la matière baryonique (atomes et molécules qui composent les structures visibles dans l'Univers observable : étoiles, galaxies, amas de galaxies, etc.), les secondes sont appelées bosons*[5] *et constituent les champs de force (on parle*

(3) http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires-caracteres-generaux, par Maurice Jacob et Bernard Pire,
http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires, par Étienne Klein.

(4) http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires-fermions, par Jean-Eudes Augustin, Michel Paty, et Bernard Pire.

(5) http://www.universalis.fr/encyclopedie/particules-elementaires-bosons,

plutôt d'interactions) hormis la gravitation, qu'on n'a pas encore réussi à intégrer au modèle. Les douze fermions décrits par le modèle standard sont classés en trois générations, c'est-à-dire en trois quadruplets de particules dont les termes correspondants sont de masse croissante d'une génération à la suivante. Seuls les fermions de la première génération (dont la masse est la plus faible) sont couramment observés et constituent la matière que nous connaissons ; les huit autres fermions ne s'observent que dans des conditions particulièrement énergétiques qui ne se rencontrent pas dans notre environnement usuel.

On se reportera à [I] pour une présentation du modèle standard et de ses généralisations (théorie des cordes par exemple). A ce sujet on observe la préoccupation des physiciens au sujet des « cardinalités géométriques » ; en effet, Iliopoulos écrit :

A l'heure actuelle, la solution qui semble la plus prometteuse est la théorie des cordes. On désigne ainsi l'ensemble des théories décrivant non plus des objets élémentaires ponctuels, mais des objets étendus, dont les plus simples sont filiformes (unidimensionnels) et nommés cordes.

Comme toute théorie d'objets étendus, la théorie des cordes contient une longueur fondamentale : la longueur de la corde...

Commentaire 42 : **On croit rêver en lisant cette façon de traiter les cardinalités d'ensembles, passant du cardinal géométrique 1 au cardinal d'un continuum. On perçoit également une certaine « fuite en avant » sur la nécessité d'éliminer certaines incohérences limites en remplaçant celles-ci par ce que l'auteur appelle des « objets étendus » tout aussi inconsistants physiquement.** □

3) Principe de localité vs non-localité

(cf. [AG]). On peut lire dans l'article de Alain Aspect et Philippe Grangier [6] le texte suivant :

En physique, le principe de localité, connu également sous le nom de principe de séparabilité, stipule que des objets distants ne peuvent avoir une influence directe l'un sur l'autre (...).
C'est donc le concept de réalité physique séparable qui est au cœur du débat. Pour Einstein, le monde peut être conçu comme formé d'entités

par Claude Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, et Gilbert Grynberg, Bernard Pire.

(6) http://www.universalis.fr/encyclopedie/separabilite-et-non-separabilite-mecanique-quantique

localisables dans l'espace-temps, munies de propriétés qui constituent leur réalité physique. Ces entités ne peuvent interagir que localement au sens relativiste, c'est-à-dire via des interactions ne se propageant pas plus vite que la lumière. Une telle conception du monde est appelée réaliste locale, ou séparable.

Commentaire 43 : **On notera, au plan mathématique, l'absurdité de la mention « n'interagir que localement au sens relativiste » qui implique au mieux une idée de décroissance rapide mais non d'inexistence absolue de cette influence dans l'espace. Cette notion topologique (au sens de voisinage ouvert, cf. Chapitre IX) doit avoir une existence précise qui resterait à définir ; elle pose encore le problème de la nature ($\mathbb{R}$-objet ou non) de l'espace : en effet, un espace topologique est soit de type discret, comme un réseau dans $\mathbb{R}^n$ muni de la topologie provenant de celle de $\mathbb{R}^n$ (les points sont des ouverts, c'est la localité absolue, peu crédible), soit plus classiquement de type non discret pour lequel la notion physiquement intéressante est la connexité (ou non-connexité).**

Dans le cas de non-connexité, l'espace est dont une réunion de « composantes connexes » (à la fois ouvertes et fermées) qui représentent autant de régions de non-localité, mais alors de localité absolue d'une composante à une autre. Le cadre mathématique actuel utilisé pour décrire la physique rend la non-connexité spatiale très extravagante a priori. □

Le principe de localité, issu de la relativité restreinte, a été précisé en ces termes par Albert Einstein :

Il semble essentiel pour cette disposition des choses introduites en physique que ces dernières, à un moment donné, revendiquent une existence indépendante l'une de l'autre, dans la mesure où elles se trouvent dans différentes régions de l'espace. Sans l'hypothèse de l'existence mutuellement indépendante (de l'« être-ainsi ») des choses séparées spatialement les unes des autres, hypothèse qui trouve son origine dans la pensée de tous les jours, la pensée physique qui nous est familière ne serait pas possible. On ne voit pas comment les lois physiques pourraient être formulées et vérifiées sans une telle séparation.

Ce principe s'avère remis en question par la physique quantique, notamment par les phénomènes d'intrication quantique. Les physiciens David Bohm et Basil Hiley estiment qu'il n'existe aucun bien-fondé aux objections au concept de non-localité. Répondant à ceux qui jugent que l'acceptation de la non-localité minerait la possibilité d'isoler et d'observer scientifiquement quelque objet que ce soit, Bohm et Hiley opposent le fait que, dans le monde macroscopique, cette science est possible, puisque les effets de non-localité, montrent-t-ils, ne sont pas significatifs : l'interprétation permet exactement le même degré de séparabilité des systèmes que ce qui est requis par le « type de travail scientifique qui est effectué dans les faits ».

Accorder la théorie de la relativité restreinte avec la non-localité (voir Paradoxe EPR) est une autre question plus complexe, mais Bohm, comme John Stewart Bell, soulignera que ce n'est pas une transmission de signaux qui est en jeu dans la notion de non-localité (cf. [AG]). Bohm et Hiley, comme Bell, voient dans le rejet de la non-localité des facteurs autres que scientifiques (1990, 1993) :

L'idée même d'action à distance est très répugnante pour les physiciens. Si j'avais une heure pour le faire, je vous bombarderais de citations de Newton, d'Einstein, de Bohr et de tous les autres grands hommes, vous disant combien il est impensable que, en faisant quelque chose ici, nous pouvons changer une situation lointaine. Je pense que les pères fondateurs de la mécanique quantique n'avaient pas tellement besoin des arguments d'Einstein sur la nécessité qu'il n'y ait pas d'action à distance, parce qu'ils regardaient ailleurs. L'idée qu'il y ait soit déterminisme, soit action à distance, leur était si répugnante qu'ils détournèrent le regard. Eh bien, c'est la tradition, et nous devons apprendre, dans la vie, parfois, à apprendre de nouvelles traditions. Et il se pourrait bien que nous devions apprendre non pas tant à accepter l'action à distance, mais à accepter l'insuffisance de « pas d'action à distance ».

Les objections à la non-localité semblent être plus ou moins de l'ordre d'un préjugé qui s'est développé avec la science moderne. Au début du développement de la science, il y eut un long combat pour se libérer de ce qui pourrait bien avoir été perçu comme des superstitions primitives et des notions magiques, où la non-localité était clairement une notion-clé. Peut-être reste-t-il une peur profondément enracinée que le simple fait de considérer l'idée de non-localité pourrait rouvrir les vannes qui nous protègent de ce qui est perçu comme des pensées irrationnelles tapies sous la surface de la culture moderne. Même si c'était le cas, ce ne serait pas un argument valable contre la non-localité.

COMMENTAIRE 44 : **Tout ceci ne signifie pas que la non-localité ait une influence mesurable au niveau macroscopique, mais**

mathématiquement, compte tenu de l'apparente connexité de l'Univers muni de ses lois universelles et de son histoire, une non-localité convenable est quasi-évidente ; elle reste à préciser, compte-tenu de la prévalence des descriptions de type $\mathbb{R}$-objets dans un cadre manifestement quantifié (situation sans doute à l'origine du dilemme localité/non-localité).

De plus la remarque ci-dessus :

La non-localité minerait la possibilité d'isoler et d'observer scientifiquement quelque objet que ce soit.

est au contraire parfaitement logique dans la mesure où tout événement (expérience, observation, mesure) est une « relation symétrique entre objets de l'Univers » et non une interconnexion provisoire entre l'Univers et une conscience « extérieure » ; l'idée qu'il y aurait un objet d'un côté et un observateur de l'autre est une dissymétrie abusive et c'est peut-être l'objet qui mesure l'observateur.

A ce titre, qu'advient-il des « expériences intellectuelles pures » où par exemple on va affirmer tel résultat (donné par exemple par une distance d). Ou bien on affirme que d existe dans $\mathbb{R}$ (a priori absurde) ou dans un ensemble discret quasi-dense dans $\mathbb{R}$ (quantification), et on est dans un cadre deterministe mais inconnaissable avec une précision mathématisable, ou bien il est impossible de prévoir le résultat sans concevoir (même abstraitement) un système physique infiniment plus complexe réalisant la mesure (cadre non deterministe par essence).

Pour un aperçu élémentaire des travaux de David Bohm, voir [Mas]. Le vocabulaire physico–mathématico–philosiphique de Bohm et de cet ouvrage est probablement un frein à l'exploitation moderne du point de vue de Bohm qui offre probablement une porte de sortie aux difficultés rencontrées pour des aspects physiques comme pour les aspects mathématiques que nous avons mis en évidence. De fait, le vocabulaire, parfois naïf, ne doit pas faire illusion : le contexte reste celui des $\mathbb{R}$-objets. □

4) Le théorème (ou paradoxe) EPR

(Einstein–Podolsky–Rosen)

Ce résultat [7] est en liaison avec la notion précédente de localité (ou séparabilité). La version donnée dans [La] s'énnonce :

Si toutes les prédictions de la mécanique quantique sont correctes (même pour des systèmes constitués de plusieurs particules éloignées) et si la réalité physique peut être décrite dans un cadre local (ou séparable), alors la mécanique quantique est nécessairement incomplète : il existe des éléments de réalité qui sont laissés de côté par cette théorie.

Rappelons que ceci est dû au phénomène d'intrication de deux particules, ce que [Ro] exprime sous la forme :

Deux particules quantiques peuvent se trouver dans un état tel que seules les propriétés de la paire sont définies.

Commentaire 45 : **On peut donc affirmer que l'expérience confirme la non-localité. On peut même dire qu'il existe, au plan mathématique, un modèle de pensée aussi fondamental que classique qui est celui d'une possible « loi de composition » (au sens de l'algèbre :** $(x, y) \mapsto x \star y$**) qui peut transformer l'information (celle de** x **et celle de** y **dans un cadre « séparable ») en une information plus faible (celle de** $x \star y$**) mais plus précise sur leur couple.**

De façon imagée (sans aucune réalité physique), dans le corps fini à deux éléments $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$**, la seule relation supposée connaissable** $x + y = 1$ **(intrication) implique** $x = 0, y = 1$ **ou** $x = 1, y = 0$ **(inconnaissabilité séparable de** x **et de** y**).**

Comme on le voit, ce principe algébrique ne correspond pas à une transmission d'information entre x **et** y**, mais à ce qui est affirmé ci-dessus.** □

5) Le théorème de Bell

Par Bernard Cagnac.[8] D'après [Sc], Ch. 7, l'idée est que les intrications s'établissent à la source (censée créer deux particules $p(x)$, $p(y)$ simultanément et envoyées respectivement à deux observateurs X et Y

(7) http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_EPR

(8) http://www.universalis.fr/encyclopedie/bell-theoreme-de-bell, http://www.universalis.fr/encyclopedie/separabilite-et-non-separabilite-mecanique-quantique, par Alain Aspect, Philippe Grangier.

éloignés), où x et y représentent un certain nombre d'informations ou caractéristiques qui leur sont associées et dépendent de la nature physique de cette émission.

Si l'on utilise l'image mathématique précédente, on est obligé d'admettre que X ne reçoit $p(x)$ qu'avec l'information cachée $x + y = 1$ et de même pour Y recevant $p(y)$ avec $x + y = 1$. Autrement dit on aurait les faits suivants : ces observateurs prennent connaissance de leur particule (au moyen de mesures convenables) sachant que la particule $p(x)$ est caractérisée par l'information x, $x \in \mathbb{F}_2$ et de même $p(y)$ caractérisée par l'information y, $y \in \mathbb{F}_2$.

(i) Situation non intriquée. C'est le cas où les particules seraient totalement indépendantes (émissions de sources analogues mais distinctes dans l'espace-temps) conduisant au schéma :

$$\begin{aligned} &X \text{ reçoit } (p(x), x) \text{ et mesure } x = 0 \textit{ ou } x = 1 \text{ de façon équilibrée} \\ &Y \text{ reçoit } (p(y), y) \text{ et mesure } y = 0 \textit{ ou } y = 1 \text{ de façon équilibrée.} \end{aligned}$$

(i) Situation intriquée. C'est le cas où les particules existent avec l'information cachée $x + y = 1$ (pour des raisons liée aux données physique de l'émission qu'il conviendrait de mieux connaître) :

$$\begin{aligned} &X \text{ et } Y \text{ reçoivent respectivement } (p(x), x) \text{ et } (p(y), y) \\ &\text{et leurs mesures donnent respectivement} \\ &\big(x = 0 \text{ pour } X \text{ et } y = 1 \text{ pour } Y\ \big) \text{ ou } \big(x = 1 \text{ pour } X \text{ et } y = 0 \text{ pour } Y\big). \end{aligned}$$

Le théorème de Bell (ou plutôt le cas particulier de ce résultat) dit simplement que certaines fonctions $f(x, y)$ ne prennent pas toutes les valeurs a priori possibles lorsque x et y sont indépendants ; ici on peut prendre $f(x, y) = x + y + xy$ qui prend toutes valeurs dans $\mathbb{F}_2$, sauf sous la condition $x + y = 1$ auquel cas $f(x, y)$ est toujours égale à 1.

Chapitre XI

Principe anthropique

C'est sans doute l'aspect philosophico-scientifique le plus débatu et il n'est pas possible ici d'en rendre compte, sauf que la confrontation physique vs mathématique que nous avons entreprise s'invite forcément dans ce débat. Dans divers ouvrages, dont l'article de Marc Lachièze-Rey [1], on peut lire des définitions, à caractère plutôt philosophique, résumées de la façon suivante :

Il y a différentes formulations du principe anthropique :

(i) Un principe anthropique faible, selon lequel notre position dans l'Univers est nécessairement privilégiée au sens où elle doit être compatible avec l'existence d'une forme de vie évoluée, puisque nous sommes là pour l'observer. Cette démarche conduit à remarquer qu'il est tautologique de constater un certain nombre d'ajustements fins au moins concernant les sites où précisément la vie apparait et s'interroge sur elle-même.

(ii) Un principe anthropique fort, selon lequel l'Univers doit avoir des lois et des paramètres fondamentaux afin que des êtres évolués puissent y apparaitre à un certain moment.

COMMENTAIRE 46 : **Il n'y a pas une grande différence entre les deux définitions. Pour analyser ce principe sous un angle plus physico-mathématique, nous proposons l'approche suivante qui englobe les deux définitions et qui consiste d'abord à « tuer » le principe de probabilités pour les « événements réels », par opposition aux « événements mathématiques ».**

Par *événement mathématique*, **nous entendons ce qui est bien classique, comme un lancer de dé conduisant à la probabilité conditionnelle $\frac{1}{6}$ d'obtenir l'as, mais sous des hypothèses de perfection du dé, du lancer, l'aspect conditionnel de cette probabilité venant du fait que l'on ne se préoccupe pas de la réalité de**

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/principe-anthropique par Marc Lachièze-Rey.

cet acte, ni de sa faisabilité, ni de sa place dans l'espace-temps (une expérience intellectuelle en quelque sorte associée à une probabilité exacte de $\frac{1}{6}$).
Ce cadre suppose que l'on fait abstraction de tout contexte (i.e., de toute la physique environnante) et en particulier de tout « passé ».

Par *événement réel*, **nous entendons tout événement dont la description est complète pour le physicien (ce qui peut se concevoir comme une quantité d'information maximale, donc concrètement inexprimable car évoquant le paradoxe de** *l'ensemble de tous les ensembles*), **ce qui est totalement différent car ceci inclut l'existence et les caractéristiques d'un ensemble quasi-infini de particules formant le dé, l'opérateur, l'environnement matériel du lancer, dans l'espace-temps (une sorte de vecteur d'état obtenu depuis le « big-bang » et mettant en jeu** *toute* **l'histoire de l'Univers).**
Dans ce cas, la description à probabiliser n'est même pas bornée (ou si l'on préfère est non définie). Un « calcul » d'une telle probabilité donnerait une quantité infinitésimale considérablement plus petite que la constante de Planck, le « zéro physique » en quelque sorte, associé à l'« infini physique » du nombre des « événements possibles ».
Pourtant ce lancer de dé (et pas un autre) a eu lieu, ce qui correspond à la définition du principe anthropique sans qu'il soit besoin de faire intervenir un quelconque esprit intelligent (notion peut-être relative dans l'Univers). □

Naturellement, tout raisonnement utilisant la vie humaine paraît encore plus spéctaculaire (de façon illusoire à notre avis car elle est le pur produit de l'évolution « froide et impassible » de l'Univers). Il faut donc déduire de ce qui précède que la probabilité de l'existence d'Einstein est nulle (on peut faire le raisonnement pour soi-même). Quant à l'existence d'un phénomène encore plus complexe (l'état global de l'Univers à « un instant précis » par exemple), sa probabilité est encore plus nulle si l'on peut dire, pourtant « il est ».

Le principe anthropique décrit donc une forme apparente de tautologie, distincte de celle de la logique mathématique (du genre $A = A$), dans la mesure où il semble utiliser l'observateur humain (or le principe anthropique est le même dans l'Univers physique débarrassé de toute pensée). Cette notion a toutefois des conséquences.

Rappelons succintement le point de vue de Ilya Prigogine [2]:

Prigogine développe la thèse suivante : la science classique considérait les phénomènes comme déterminés et réversibles, ce qui est en contradiction avec l'expérience courante. L'irréversibilité des phénomènes temporels caractéristique de la thermodynamique (non linéaire) réconcilie la physique avec le sens commun, tout en faisant date dans l'histoire de la thermodynamique.

COMMENTAIRE 47 : **Ceci est à mettre en parallèle avec la nature « thermodynamique » du temps évoquée au § 4). De tout ceci que peut-on dire logiquement des notions de causalité et de déterminisme. En ce qui concerne le principe de causalité, il paraît vide si on l'énonce sous la forme :** « *les mêmes causes produisent les mêmes effets* » **car le principe anthropique nous dit que toute cause (qui est donc un événement réel) est unique et qu'il ne saurait y en avoir deux (contrairement au contexte des événements mathématiques en raison du caractère purement abstrait de la formulation). Ceci montre aussi l'absurdité de tout principe de réversibilité.**

On est donc réduit au seul éventuel déterminisme, mais quel sens lui donner si l'on se réfère en plus à la mécanique quantique, sans parler des phénomènes de « conscience » tels que envisagés par David Bohm [Mas] ? Il semble clair que l'on ne peut trancher sans des hypothèses plus fines sur l'interprétation que l'on doit faire de la réalité de l'Univers (voir § 2) entre autres), des questions de non-localité et du passage du quantique au macroscopique (phénomènes de décohérence). □

Dans le texte de Marc Lachièze-Rey on peut lire à la fin (après avoir évoqué les multivers pour une tentative de justification du principe anthropique) :

La conclusion est en fait déjà connue depuis des siècles : toute vision anthropocentrique [conception du monde dans laquelle tout est rattaché à l'homme], *ou anthropique, ne peut prendre un sens que d'un point de vue religieux.*

Précisons que, malgré l'impossibilité de lui donner un sens physique, un tel énoncé n'est pas sans conséquences. En effet, le prendre vraiment au sérieux (ce qui heureusement est rarement le cas, même chez ceux

(2) http://www.universalis.fr/encyclopedie/hasard-et-necessite/, par Ilya Prigogine et Isabelle Stengers,
http://www.universalis.fr/encyclopedie/ilya-prigogine/, par Isabelle Stengers.

qui s'y réfèrent) voudrait dire qu'il « explique » pourquoi le monde est comme il est. Cela rendrait tout à fait vain et inutile de chercher une autre explication, par exemple sous la forme d'une théorie physique plus élaborée.

Commentaire 48 : **En lisant ces affirmations, on est en droit de se demander de quel principe anthropique il est question ! Si l'on admet l'existence d'une création au sens religieux, toute tentative de confrontation philosophico-physico-mathématique est inutile ; cependant le « créateur » est très fort sur tous les plans et j'en attends la révélation des tous les théorèmes ! On préfèrera le document très complet, à la fois scientifique et philosophique, de Marc Santolini : Le Principe Anthropique – La place de l'homme dans l'Univers, Mémoire de M1 LOPHISS, sous la direction de Marc Lachièze-Rey, mais à notre avis une perception purement logique du principe anthropique est possible dans le cadre de systèmes dynamiques mettant en jeu les théories de l'Information et de l'Algorithmique et conduisant peut-être à démontrer qu'en effet les « fondamentaux » (constantes de la physique et certainement beaucoup d'autres axiomes) ne sont pas arbitraires. La théorie de la Complexité, encore en partie inaccessible, peut être indispensable.** [3]

Le principe anthropique n'« explique » pas le monde, il mesure simplement l'impuissance que nous avons à trouver une explication ou au moins un sens logique. Tout système dynamique (même peu complexe) évolue d'une façon qui simule assez bien le principe anthropique, puisque, sauf à avoir une information complète au plan mathématique (au minimum de de type $\mathbb{R}$-objet), les solutions (ou états) sont en un sens imprévisibles, et pourtant il y en a une. Le fait qu'en cours de route la vie humaine apparaisse doit être considéré comme un degré de complexité d'un niveau élevé pour un système dynamique que la physique cherche justement à cerner (il y a peut-être encore mieux « ailleurs » et le propos anthropocentrique serait de le nier sans preuve).

Le but est au contraire de voir si l'on peut, non pas *chercher une autre explication, par exemple sous la forme d'une théorie physique*

(3) *Complexité mathématique*, par Jean-Paul Delahaye, http://www.universalis.fr/encyclopedie/complexite-mathematique/, *Théorie de la complexité de Kolmogorov*, par Jean-Paul Delahaye, http://www.universalis.fr/encyclopedie/theorie-de-la-complexite-de-kolmogorov/

plus élaborée, mais rechercher, sur un plan sans doute plus axiomatique, les conditions logiques permettant une tel degré de complexité, étant entendu que l'idée que notre Univers nous appartienne est anthropocentrique (de fait l'ensemble des univers, n'est pas un « super-univers » comme il est dit dans l'article de Marc Lachièze-Rey, sauf à être victime du syndrome de «la boîte à chaussures» qui contient tout, comme l'ensemble paradoxal de tous les ensembles). Cette notion même d'Univers est certainement indépendante de toute représentation spatio-temporelle.

Autrement dit la conscience que nous avons d'un Univers est peut-être à rechercher dans la définition non probabiliste que nous avons esquissée qui ne concerne pas plus l'Homme qu'une pierre ici ou là. Reste cependant la notion de « conscience » qui semble plus difficile que tout le reste, surtout si l'on veut rester dans le cadre non philosophique de l'histoite de l'Univers et de sa réalité. Autrement dit, définir la conscience (sous réserve de son existence) ne devrait pas être plus difficile que définir un processus physique, et devrait même être liée aux fondamentaux. Ceci n'est pas nouveau puisque l'on retrouvait cette question au niveau de l'idée de mesure dans les expériences de physique, comme il a déjà été dit au sujet des travaux de David Bohm [Mas]. Stuart Hameroff et Roger Penrose ont proposé de telles approches, liées à la mécanique quantique, en affirmant : [4]

We conclude that consciousness plays an intrinsic role in the universe. □

(4) On peut voir de telles tentatives assez complexes dans l'article : *Consciousness in the universe – A review of the « Orch OR » theory*, http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571064513001188

Chapitre XII

Paradoxe du chat de Schrödinger

Par commodité, reproduisons en détail un texte de Wikipédia :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Chat_de_Schrodinger
tout en essayant, via des « Commentaires », de rattacher les affirmations aux commentaires des sections précédentes ; on peut aussi se reporter à [Pen] ainsi qu'à [EZ] et à une majorité des références bibliographiques :

C'est l'équation de Schrödinger qui autorise ces superpositions : cette équation, régissant les états possibles d'une particule étudiée dans le cadre de la physique quantique, est linéaire, ce qui entraîne que pour deux états possibles d'une particule, la combinaison de ces deux états est également un état possible. L'observation provoque en revanche la réduction à un seul état. Si l'on suppose une dépendance directe entre l'état d'une particule et la vie du chat - ce que suggère la linéarité de l'équation de Schrödinger - le chat devrait être dans un état superposé, mort et vivant, jusqu'à l'observation, qui le réduira à un seul état.

COMMENTAIRE 49 : **De même que pour la notion de mesure, la notion d'observation nous semble non définie dans ce type de commentaires et est de fait fondamentale.** □

Différentes options proposent de résoudre ce paradoxe :

1) Théorie de la décohérence.

Un certain nombre de théoriciens quantiques affirment que l'état de superposition ne peut être maintenu qu'en l'absence d'interactions avec l'environnement qui « déclenche » le choix entre les deux états (mort ou vivant). C'est la théorie de la décohérence. La rupture n'est pas provoquée par une action « consciente », que nous interprétons comme une « mesure » , mais par des interactions physiques avec l'environnement, de sorte que la cohérence est rompue d'autant plus vite qu'il y a plus d'interactions.

A l'échelle macroscopique, celui des milliards de milliards de particules, la rupture se produit donc pratiquement instantanément. Autrement dit, l'état de superposition ne peut être maintenu que pour des objets de très petite taille (quelques particules). La décohérence se produit indépendamment de la présence d'un observateur, ou même d'une mesure. Il n'y a donc pas de paradoxe : le chat se situe dans un état déterminé bien avant que la boîte ne soit ouverte.

Cette théorie est notamment défendue par les physiciens Roland Omnès et Jean-Marc Lévy-Leblond, et par le prix Nobel Murray Gell-Mann (voir §§ 5), 6)).

Commentaire 50 : « *La rupture n'est pas provoquée par une action « consciente », que nous interprétons comme une « mesure », mais par des interactions physiques avec l'environnement, de sorte que la cohérence est rompue d'autant plus vite qu'il y a plus d'interactions* » **; ceci pourrait définir la « marche en avant » du principe anthropique et est intéressant quoique non défini quant au processus et ramène à une mathématisation ou axiomatisation (éventuelle) non connue. Le § 2) ci-après suggère une remarque analogue.** □

2) Théorie de la décohérence avec paramètres cachés.

Une variante de la théorie de la décohérence est défendue notamment par les physiciens Roger Penrose, Rimini, Ghirardi et Weber. Elle part de la constatation que la décohérence n'est démontrée à partir des lois quantiques que dans des cas précis, et en faisant des hypothèses simplificatrices et ayant une teneur arbitraire (histoires à « gros grains »).

De plus, les lois quantiques étant fondamentalement linéaires, et la décohérence étant non linéaire par essence, obtenir la seconde à partir des premières paraît hautement suspect aux yeux de ces physiciens. Les lois quantiques ne seraient donc pas capables à elles seules d'expliquer la décohérence.

Ces auteurs introduisent donc des paramètres physiques supplémentaires dans les lois quantiques (action de la gravitation par exemple pour Penrose) pour expliquer la décohérence, qui se produit toujours indépendamment de la présence d'un observateur, ou même d'une mesure.

Cette théorie présente l'avantage par rapport à la précédente d'apporter une réponse claire et objective à la question « que se passe-t-il entre le niveau microscopique et le niveau macroscopique expliquant la décohérence » . L'inconvénient est que ces paramètres supplémentaires, bien que compatibles avec les expériences connues, ne correspondent à aucune théorie complète et bien établie à ce jour.

3) Approche positiviste.

De nombreux physiciens positivistes, bien représentés par exemple par Werner Heisenberg ou Stephen Hawking, pensent que la fonction d'onde ne décrit pas la réalité en elle-même, mais uniquement ce que nous connaissons de celle-ci (. . .). Autrement dit, les lois quantiques ne sont utiles que pour calculer et prédire le résultat d'une expérience, mais pas pour décrire la réalité.

Dans cette hypothèse, l'état superposé du chat n'est pas un état « réel » et il n'y a pas lieu de philosopher à son sujet (d'où la célèbre phrase de Stephen Hawking « Quand j'entends *chat de Schrödinger*, je sors mon revolver »). De même, « l'effondrement de la fonction d'onde » n'a aucune réalité, et décrit simplement le changement de connaissance que nous avons du système. Dans cette approche toujours assez répandue parmi les physiciens, le paradoxe est donc évacué.

4) Théorie des univers parallèles.

La théorie des univers parallèles introduite par Hugh Everett (cf. § a)) prend le contre-pied de l'approche positiviste et stipule que la fonction d'onde décrit la réalité, et toute la réalité. Cette approche permet de décrire séparément les deux états simultanés et leur donne une double réalité qui semblait avoir disparu, dissoute dans le paradoxe (plus exactement deux réalités dans deux univers complètement parallèles, et sans doute incapables de communiquer l'un avec l'autre une fois totalement séparés).

Cette théorie ne se prononce pas sur la question de savoir s'il y a duplication de la réalité (many-worlds) ou duplication au contraire des observateurs de cette même réalité (many-minds), puisque ces deux possibilités ne présentent pas de différence fonctionnelle. Malgré sa complexité et les doutes sur sa réfutabilité, cette théorie emporte l'adhésion de nombreux physiciens, non convaincus par la théorie de la décohérence, non positivistes, et pensant que les lois quantiques sont exactes et complètes.

COMMENTAIRE 51 : **Le seul avantage de ce point de vue serait l'aspect « cardinalités ensemblistes », car l'ampleur du processus ne saurait se satisfaire de cardinalités finies et/ou d'ensembles discrets et conduirait probablement à un modèle de type $\mathbb{R}$-objet ou pire. Ceci dit la discontinuité radicale entre fini/discret et infini/continuum rend ce point de vue délicat comme expliqué dans le Commentaire 27.** □

5) Reformulation radicale de la théorie quantique.

Le paradoxe du chat prend sa source dans la formulation même des lois quantiques. Si une théorie alternative, formulée différemment, peut être établie, alors le paradoxe disparaît de lui-même. C'est le cas pour la théorie de David Bohm (cf. [Mas]), inspirée des idées de Louis de Broglie, qui reproduit tous les phénomènes connus de la physique quantique dans une approche réaliste, à variables cachées (non locales). Dans cette théorie, il n'existe ni superposition des particules ni effondrement de la fonction d'onde, et donc le paradoxe du Chat est considéré de ce point de vue comme un artefact d'une théorie mal formulée.

Bien que la théorie de Bohm réussisse à reproduire tous les phénomènes quantiques connus et qu'aucun défaut objectif de cette théorie n'ait été mis en évidence, elle est assez peu reconnue par la communauté des physiciens. Elle est pourtant considérée par celle-ci comme un exemple intéressant, et même un paradigme d'une théorie à variables cachées non locales. [1]

6) Théorie de l'influence de la conscience.

Un prix Nobel de physique 1963, Eugene Wigner, soutient la thèse de l'interaction de la conscience, dans la décohérence (cessation de la superposition d'état). Dans cette interprétation, ce ne serait pas une mesure, ou des interactions physiques, mais la conscience de l'observateur qui « déciderait » finalement si le chat est mort ou vivant.

En regardant par le hublot, l'œil (dans ce cas, c'est lui l'appareil de mesure) se met dans une superposition d'états : d'un côté, un état A : « uranium désintégré, détecteur excité, marteau baissé, fiole cassée, chat mort » ; de l'autre, un état B : « uranium intact, détecteur non excité,

(1) http://www.universalis.fr/encyclopedie/separabilite-et-non-separabilite-mecanique-quantique/, par Alain Aspect, Philippe Grangier.

marteau levé, fiole entière, chat vivant » ; le nerf optique achemine au cerveau une onde qui est aussi dans une superposition des états A et B, et les cellules réceptrices du cerveau suivent le mouvement. C'est alors que la conscience, brutalement, fait cesser le double jeu, obligeant la situation à passer dans l'état A ou dans l'état B (rien ne dit pourquoi ce serait A ou B).

Wigner ne dit pas comment, mais les conséquences de sa position sont importantes : la réalité matérielle du monde serait déterminée par notre conscience, et celle-ci est unique (deux observateurs humains doivent percevoir la même chose). Cette solution peut être vue comme une variante de la solution «avec variables cachées», où le «paramètre supplémentaire» serait la conscience. Les avantages de cette solution sont les mêmes que la solution avec variables cachées, les inconvénients étant qu'elle repose sur des notions non scientifiques (faute d'une définition scientifique de la conscience).

Une variante intéressante rend le résultat plus spectaculaire encore : un appareil photo prend une image du chat au bout d'une heure, puis la pièce contenant le chat est définitivement scellée (hublots fermés). La photographie ne serait quant à elle développée qu'un an plus tard. Or, ce n'est qu'à ce moment-là qu'une conscience humaine tranchera entre la vie ou la mort du chat. Le signal nerveux remonterait-il le temps pour décider de la vie ou de la mort du chat ? Cela peut paraître absurde, mais l'expérience de Marlan Scully et le paradoxe EPR illustrent l'existence de rétroactions temporelles apparentes en physique quantique.

- Et si le chat était un observateur ? Dans la résolution du paradoxe du chat de Schrödinger, on considère que le chat n'a pas de conscience lui permettant de jouer le rôle d'observateur. On postule donc que l'expérience du chat de Schrödinger est équivalente à celle du baril de poudre d'Einstein.

Ceux qui trouvent contre-intuitif de considérer un chat comme un simple objet dépourvu de conscience peuvent carrément explicitement remplacer le chat par le baril de poudre. Si au contraire on souhaite étudier ce qui se passe si l'observateur est conscient, on remplace le chat par un être humain, ou on ajoute un être humain dans la chaîne, pour éviter les contestations sur le fait que l'observateur est conscient.

Ce sont les variantes de l'ami de Wigner et du suicide quantique. Il faut bien comprendre que les cas d'observateurs conscients constituent des variantes du problème initial, tandis que celles où l'observateur n'est pas conscient sont des reformulations équivalentes.

- L'ami de Wigner. Dans cette variante imaginée par Eugene Wigner, un de ses amis observe le chat en permanence par un hublot. Cet ami aime les chats. Donc la superposition d'états du chat mort/vivant conduirait à une superposition d'états de l'ami de Wigner triste/heureux, si l'on suppose qu'un observateur conscient peut également être mis dans un état superposé. La plupart des interprétations ci-dessus concluent au contraire que la superposition d'états serait brisée avant d'entraîner celle de l'ami de Wigner.

Une version moderne de cette expérience de pensée a été proposée par Taoufik Amri en 2011. L'idée centrale est d'imaginer un dispositif amplifiant les signes vitaux du chat afin de visualiser son état de vie ou de mort à l'aide d'une petite diode laser. Si le chat est mort, la diode n'émet pas de lumière. Si le chat est vivant, la diode émet un état quasi-classique du champ lumineux. Si le chat est dans une superposition d'états « mort et vivant«, il en est de même pour la lumière, qui se retrouve dans un état intriqué à celui du chat. L'état du système global (noyau, chat, laser) est une superposition des états : « noyau excité et chat vivant et émission de lumière« et « noyau désintégré et chat mort et diode éteinte«.

On peut alors étudier les effets d'une observation par l'ami de Wigner en traitant l'œil humain comme un véritable détecteur optique. En s'appuyant sur les données issus d'expériences de neurophysiologie, le traitement quantique consiste à appliquer le postulat de la mesure au système triplement intriqué. On montre alors que l'état après l'observation de lumière est un état complètement mélangé, où toutes les cohérences quantiques ont été dissipées. Le système (noyau, chat) se retrouve dans le mélange statistique « noyau excité, chat vivant« ou « noyau désintégré, chat mort« . En d'autres termes, l'œil humain n'est pas suffisamment quantique pour détecter un état « chat de Schrödinger«.

Si l'on veut préserver le chat de Schrödinger, il faut effectuer une observation à travers un détecteur d'états « chat de Schrödinger« de la lumière, c'est-à-dire des superpositions des états vide et quasi-classique du chat lumineux. T. Amri propose dans sa thèse le principe d'un tel détecteur et montre comme ce dernier pourrait être conçu avec les technologies actuelles.

La principale conclusion de cette nouvelle version de cette expérience de pensée est que bien évidemment la conscience n'intervient absolument pas dans le devenir du chat. Le postulat de la mesure, aussi appelé règle de projection, traduit dans le formalisme mathématique de la théorie quantique, une idée assez intuitive : après une mesure, le système se retrouve dans l'état dans lequel on l'a mesuré. L'étrangeté quantique vient surtout de l'existence de superposition quantique, comme des états « chat de Schrödinger « .

7) Le suicide quantique.

Le suicide quantique propose qu'un être humain, capable de jouer le rôle d'observateur, prenne la place du chat. Cette situation pose problème aux interprétations faisant jouer un rôle à la conscience, car notre courageux volontaire ne peut avoir conscience par définition que d'être vivant (. . .). Cela entraîne de nouvelles questions. Contrairement au cas du chat (non conscient, rappelons qu'en cas de doute sur ce sujet on peut remplacer le chat de Schrödinger par le baril de poudre d'Einstein), cette expérience conduirait à différents résultats selon les interprétations. Elle permettrait donc d'éliminer plusieurs interprétations si elle n'était pas irréalisable pour une multitude de raisons évidentes.

- Interprétation de Wigner. L'interprétation de Wigner conduit à l'impossibilité de la mort de notre volontaire, qui doit donc interdire la désintégration de l'atome. En effet, d'après Wigner, c'est la prise de conscience d'un état qui provoque, directement ou indirectement, l'effondrement de la fonction d'onde. La prise de conscience n'étant possible que dans le cas « vivant », cela rend impossible l'effondrement de la fonction d'onde dans l'état « mort » (en tout cas tant qu'il n'y a pas un « ami » de Wigner pour prendre conscience de l'état de l'expérimentateur). Que se passe-t-il quand la probabilité de désintégration devient très proche de 1 ? Jusqu'à quand les atomes accepteront-ils de ne pas se désintégrer parce qu'un humain ne peut avoir conscience de sa propre mort ?

- Cas des univers multiples d'Everett. Dans des univers multiples, chaque évènement non observé se situe à un nœud. Des branches se créent lorsqu'il est observé. Par exemple, le chat de Schrödinger sera vivant dans une branche, mais mort dans une autre. Les deux branches ne se croisant pas, il n'y a aucun paradoxe. Le cas du « suicide quantique » a été, à l'origine, imaginé pour contrer cette interprétation. Cette interprétation fait également jouer un rôle à la conscience, car elle stipule qu'à chaque observation la conscience se « scinde » en autant d'univers que d'observations physiquement possibles. Dans cette interprétation, il y a toujours au moins un univers dans lequel l'expérimentateur est vivant (à moins que la probabilité de mourir ne soit de 1). On pourrait dès lors se demander si la « conscience » ne bifurque pas systématiquement dans l'Univers avec le résultat « vivant », menant à une sorte d'« immortalité quantique » (. . .).

8) Conclusion.

Dans tous les cas, cette expérience de pensée et le paradoxe associé ont aujourd'hui pris valeur de symboles centraux de la physique quantique. Qu'ils servent à supporter un aspect de cette théorie ou qu'ils servent à défendre une option théorique divergente, ils sont appelés à la rescousse pratiquement à chaque fois que la difficile convergence entre la réalité macroscopique et la réalité microscopique (une situation caractéristique du monde quantique) est observée ou supposée. Ce chat mort-vivant peut apparaître comme une expérience de pensée folle, mais c'est une bonne introduction à la complexité de la mécanique quantique. Il est aussi important de noter que c'est justement de la maîtrise des états de superposition et de la décohérence (et donc de la solution de ce paradoxe) que dépend la réalisation à long terme d'un ordinateur quantique.

Chapitre XIII

Conclusion

L'immense variété des hypothèses et interprétations de la mécanique quantique et plus généralement de la structure de l'Univers ne doivent pas nous éloigner de la question fondamentale posée dans ce travail qui n'est pas de « choisir », alors que les physiciens eux-mêmes sont très partagés, mais d'attirer l'attention sur le fait que quel que soit le point de vue, son expression utilise des concepts mathématiques, sans précautions « ensemblistes », et avec les caractéristiques a priori insuffisantes suivantes :

• mesurabilité ordinaire implicite (de type $\mathbb{R}$-objet ou continuum) de tout phénomène physique (autre qu'un comptage fini trivial),

• utilisation de liens ambigus (au moins dans le cadre quantique) avec l'« observateur » voire sa conscience ! Le chat de Schrödinger est-il un observateur, avec ou sans conscience, quid d'une plante du laboratoire, de ses murs ?

• interprétation d'une non localité éventuelle (intrication de particules) comme un principe mystérieux (voire contradictoire avec toute vitesse de transmission de l'information) et non comme une indication d'une autre nature à explorer,

• absence d'axiomatisation conduisant, comme pour les objets mathématiques, à l'unicité intellectuelle de l'objet physique (pouvant servir de «notion émergente») mais non à l'unicité de sa réalité ou de sa définition, seule solution pouvant justifier l'utilisation de continuum, non comme objets réels, mais comme substrat axiomatique commode de type pré-univers (cas des structures quotients entre autres),

• absence d'utilisation de topologies non conventionnelles pouvant éviter l'absurdité de topologies métriques archimédiennes identiques (issues de l'espace $\mathbb{R}^n$ ou analogues), aussi bien pour le cadre quantique (« distance de Planck ») que pour les confins de l'Univers et ses singularités (« trous noirs », histoire de l'Univers « après le Big-Bang » dans un espace-temps très $\mathbb{R}$-objet. . .).

Malheureusement il n'est pas possible de faire des propositions concrètes, ceci devant être considéré dans un cadre « Recherche Fondamentale » à laquelle doivent participer des physiciens, des mathématiciens, des informaticiens, des philosophes, des biologistes, où chacun aurait à approfondire suffisamment les connaissances des autres.

En effet, l'une des explications de cette non-recherche *Science* vs *mathématique* étant sans doute à trouver dans le cloisonnement de plus en plus prononcé des différentes disciplines. Et aussi (petite dissymétrie) dans le concept purement utilitariste des mathématiques classiques, lesquelles, même dans leurs progrès les plus considérables en Analyse, Géométrie, Systèmes dynamiques, Théorie des nombres, Logique-Informatique théoriques, demeurent égales à elles-mêmes, c'est-à-dire à une super-ingéniérie de type $\mathbb{R}$-objets.

Dans les nombreuses approches de ce style (comme celle très détaillée et remarquable de [EZ] ou de nombreux autres auteurs), la partie mathématique, vue comme modèle de pensée plus que comme réservoir technique, reste en général mineure.

Même les mathématiciens (dont de grands noms) poursuivent dans ce sens afin de donner des outils pour la physique fondamentale la plus contemporaine, ce qui crée, un peu arbitrairement, de nouveaux objets susceptibles d'offrir ce que l'on pourrait appeler « une résolution locale ou provisoire » du problème à l'instant t (cordes, super-cordes, boucles, réseaux de spins, etc.).

Enfin, il n'est pas prouvé que les mathématiques soient théoriquement suffisantes pour décrire de façon satisfaisante le principe de réalité du Monde, même si cette discipline a encore d'importantes possibilités, plus comme modèle de pensée que comme technique de « premier degré », à condition, très certainement, de lui adjoindre les dimensions plus algorithmiques et dynamiques des systèmes évolutifs.

Pour prendre une image, il est possible que la physique classique d'expression $\mathbb{R}$-objets soit à la réalité du Monde, ce que les structures mathématiques « complétées » ($\mathbb{R}$ ou d'autres complétions) sont à des structures rationnelles et/ou discrètes, mais impraticables (se souvenir du problème du théorème des valeurs intermédiaires selon l'ensemble considéré).

Autrement dit, les $\mathbb{R}$-objets (et analogues) seraient, en mathématique, les notions émergentes de ces structures, tandit que les « grandeurs » physiques (temps, espace, vitesses, mesures, ...) seraient les notions émergentes d'un formalisme à axiomatiser. Ceci éviterait les absurdités du genre « quelle est l'infinité des décimales de π » ? et « quelle est la décimale de rang 10^{1000} de la vitesse de la lumière ?

On sera surpris sans doute par cette conclusion, plutôt négativede la part d'un mathématicien, mais, comme l'affirme Jean-Paul Delahaye dans un échange personnel :

« *Je suis comme vous sensible depuis longtemps à l'absurdité des rapports actuels entre la physique et les mathématiques et je suis toujours étonné de voir que cela ne semble pas préoccuper grand monde ! Je pense qu'établir des rapports plus satisfaisants entre les deux disciplines est le problème le plus important de Philosophie des Sciences* ».

Depuis l'écriture de ce texte (que j'ai interrompue en 2018), Jean-Paul Delahaye a continué à publier sur ce sujet ; on pourra se reporter au dernier numéro de "Pour la Science", no. 504 - Octobre 2019 : *Vers une nouvelle théorie des infinis – L'hypothèse du continu bientôt prouvée*, qui reprend ces sujets à la lumière de travaux récents. Il est clair que notre éssai ne sera jamais à jour au plan bibliographique, mais on peut espérer que l'on trouvera des pistes de réflexion dans cette rédaction provisoire.

Bibliographie

[AG] D. Albert et R. Galchen, *Menace quantique sur la relativité restreinte*, PLS 379, Mai 2009.

[Ca] C. Callender, *Le temps est-il une illusion ?*, PLS 397, novembre 2010.

[Co] A. Connes, *non-commutative geometry*, springer, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1831, 2004.

[CG] P. Cartier, *Notes sur l'histoire et la philosophie des mathématiques, V : le problème de l'espace*. A. Grothendieck, *Mutation de la notion d'espace – Fin de la « Promenade à travers une œuvre » 1986/1987*, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Septembre 2009. [1]

[De1] J-P. Delahaye, *Négligeable mais troublant*, PLS 255, janvier 1999.

[De2] J-P. Delahaye, *L'infini est-il paradoxal en mathématiques*, PLS 278, décembre 2000.

[De3] J-P. Delahaye, *L'incomplétude, le hasard et la physique*, PLS 355, mai 2007.

[De4] J-P. Delahaye, *Une folie mathématique*, PLS 384, octobre 2009.

[De5] J-P. Delahaye, *Libre arbitre et mécanique quantique*, PLS 386, décembre 2009.

[De6] J-P. Delahaye, *L'Univers est-il mathématique ?*, PLS 392, juin 2010.

[Es1] B. d'Espagnat *Implications philosophiques de la science contemporaine*, Cahiers des sciences morales et politiques (2001/2003).

[Es2] B. d'Espagnat, *Le réel voilé - Analyse des concepts quantiques*, Collection : Le temps des sciences, Fayard, Paris 1994.

[EZ] B. d'Espagnat et H. Zwirn, *Le monde quantique – Les débats philosophiques de la physique quantique*, Editions Matériologiques, Coll. Sciences et philosophie, Paris 2014.

[G] A. Granville, *Nombres premiers et chaos quantique*, Gazette de la Société mathématique de France 97 (2003), 29–44 (traduit de Emissary, Mathematical Sciences Research Institute 2002).

(1) http://jfresan.files.wordpress.com/2009/09/entretien-cartier.pdf

[Gr] G. Gras et M-N. Gras, *Algèbre & Arithmétique Fondamentales*, Collection Référence sciences, Ellipses, Paris 2017.

[Gro] A. Grothendieck, *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, UniversitÃl' Paris 6, Grothendieck Circle (1986), 929 p. [2]

[Ha] S. Haroche, *La physique quantique*, Université de tous les savoirs, 213ème conférence, 31 Juillet 2000.

[HM] K.H. Hofmann, and S.A. Morris, *The Structure of Compact Groups*, Studies in Mathematics 25, De Gruyter 2008.

[HW] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth ed., Oxford University Press, Oxford 1979.

[I] J. Iliopoulos, *Dépasser le modèle standard*, PLS 362, novembre 2007.

[Jau] J-F. Jaulent, *Compactification ℓ-adique de* $\mathbb{R}$, Proyecciones 27 (2008), 219–235.

[La] F. Laloë, *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ?*, EDP Sciences, Collection Savoirs actuels, Paris 2011.

[LQ] H. Lombardi et C. Quitté, *Algèbre commutative : Méthodes constructives*, Collection : mathématiques en devenir, Calvage et Mounet, Paris 2011.

[Man] Ph. Mangin, *Cours de Matière et Rayonnement de l'Ecole des Mines de Nancy*, 2002/2003.

[Mas] T. Massimo, *David Bohm - La physique de l'infini*, Collection : Science et Connaissance, Macro Editions, Tours 2011.

[Mo] M. Moyer, *L'espace est-il discret ?*, Pour la Science 416 (2012), 24–31.

[MQ] Collectif, *Le monde quantique*, Dossier PLS 68, Juillet-Septembre 2010.

[P] H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Coll. Champs sciences, Flammarion, Paris 2009.

[Pen] R. Penrose, *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, Jonathan Cape, London 2004 ; traduction française : *A la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique*, Odile Jacob, Paris 2007.

[Pit] M. Pitkänen, *Topological Geometrodynamics*, Luniver Press 2006. *Introduction to p-Adic Length Scale Hypothesis and Dark Matter Hierarchy*, Science of Life (2011). [3]

(2) https://www.quarante-deux.org/archives/klein/prefaces/Romans_1965-1969/Recoltes_et_semailles.pdf

(3) http://www.scienceoflife.nl/html/p-adic_length_scale_hypothesis_and_dark_matter_hierarchy.html

[Pl1] M. Planat, *Huyghens, Bohr, Riemann and Galois: Phase-Locking*, International Journal of Modern Physics B, 20, 11/12/13, 2 (2006), 1833–1850.

[Pl2] M. Planat, *On the Cyclotomic Quantum Algebra of Time Perception*, Neuro Quantology 4, (2004), 292–308.

[Pl3] M. Planat and H. C. Rosu *Cyclotomic quantum clock*, H. Moya-Cessa, R. Jáuregui, S. Hacyan and O. Castãnos (Eds), In: Squeezed States and Uncertainty Relations, Riton Press (2003), 366–372.

[Pl4] M. Planat, *Class numbers in the imaginary quadratic field and the $\frac{1}{f}$ noise of an electron gas*, Noise in Physical Systems and $\frac{1}{f}$ fluctuations, Gijs Bosman (Ed.), World Scientific 2001, p. 590.

[Ro] C. Rovelli, *S'affranchir du temps*, PLS 397, novembre 2010.

[Sc] V. Scarani, *Initiation à la physique quantique : La matière et ses phénomènes*, Vuibert, Collection Culture Scientifique, Paris 2006.

[Shl] N. Shell, *Maximal and minimal ring topologies*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. 68, 1 (1978), 23–26.

[Sm1] L. Smolin, *Des atomes d'espace et de temps*, PLS 316, Février 2004.

[Sm2] L. Smolin, *Rien ne va plus en physique ! L'échec de la théorie des cordes*, Coll. Points Sciences, Dunod, Paris 2010 ; trad. française de *The Trouble with Physics – The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next*, Houghton Mifflin, Boston–New York 2006.

[Sm3] L. Smolin, *La renaissance du temps*, Quai des Sciences, Dunod 2014, 384 pp.

[SW] M. E. Shanks and Seth Warner, *Topologies on the rational field*, Bull. Amer. Math. Soc., 79, 6 (1973), 1281–1282. *Locally bounded topologies on the rational field*, International Congress of Mathematicians, 1974.

[T1] M. Tegmark, *Notre univers mathématique. En quête de la nature ultime du réel*, Quai des Sciences, Dunod 2014, 504 pp.

[T2] M. Tegmark, *L'essence du monde est mathématique*, La Recherche, 489, Juillet–Août 2014.

[TW] M. Tegmark et J.A. Wheeler, *La découverte du monde quantique*, Dossiers PLS 68, Juillet–Septembre 2010.

[Vol] I. V. Volovich, *Number theory as the ultimate physical theory*, p-Adic Numb. Ultr. Anal. Appl. 2, 1 (2010), 77–87.